平成26年度

医 科 学 基 礎 実 習

物 理 学 分 野

福井大学医学部 生命物質科学

目 次

I　注意事項

A　物理学実験注意事項

1. 実験は３名または２名のグループに分かれて共同で行う。各グループは４項目の実験を行う。
2. やむを得ず休むときは必ず連絡する。休んだ分の実習は別途おこなうことになる。
   [田村]0776-61-8284, 内線 2444, ktamura@u-fukui.ac.jp [内田] 0776-61-8276, 内線 2445
3. 実験に必要のない私物は各自のロッカーに置いて、実習室には持ち込まない。
   実習室への携帯電話の持ち込みは不可。
4. 実習室内は 飲食厳禁 である。また実験中の談笑は差し控える。
5. 物理の実習では白衣を着用しない。
6. 実験のテキストをよく予習し、実験の目的、解説、測定方法等を十分に理解しておく。
7. 実験にとりかかる前に、各実験で使用する測定器等の取扱書をよく読み、正しい使用法、測定範囲、精度を充分にわきまえておく。
8. 他班の物品を無断で流用しない。物品が足りないときは、教官に申し出ること。
9. ルーズリーフ式でないとじたノートを実験ノートとして用意する。実験の日時、天候・気温・湿度・気圧などの必要な環境データ、実験データ、実験中の出来事、計算等をすべて記入する。訂正は斜線で行ない、消しゴムは使用しない。レポート作成で、やむを得ず消しゴムを使用する場合は、でたゴミを吹き飛ばさないで、ゴミ箱へ入れる。
10. 測定においては数値の記録だけでなく、グラフを書きながら結果を確認すること。
11. 実験は測定だけではない。データ処理およびテキストに書いてある課題をすべて終わらせること。
12. 実験終了後は、教官に実験・データ処理・課題の進捗状況および結果を報告し、不十分な部分を解決してから退出すること。装置を元の通りに整理し、電気の差し込みは必ず抜いておく。ゴミはゴミ箱へ。
13. レポートは、各人提出する。レポート用紙はＡ４版を使用すること。グラフ用紙は実習室に用意してある。最初のレポート提出の際に、Ａ４のファイルを付けて提出する。ファイルの背表紙に、氏名、学籍番号、グループ番号を明記する。教官のチェックを受けてから、レポート作成日中に提出する。
    レポート作成日は混雑により教官によるチェックに時間がかかることが予想されるので、
    レポート作成日前に提出することが望ましい。
14. 関数電卓が用意されている。実習室内では自由に使用してよい。実習室外へ借り出すときは、備え付けのノートに必要事項を記入し、次回の実習日までに必ず返却する。
15. テキストの各実験項目のおわりにのせてある参考文献は、本学図書館所蔵のものの中から選んである。予習、レポート作成などに、最大限に利用することを希望する。

B　レポートの内容

実験番号および実験題目

学籍番号・氏名・グループ番号

共同実験者の学籍番号・氏名

実験年月日（曜日）

外囲状況　天候、気温、気圧、湿度、その他（当該実験に関係ある事項）

1. [**実験の目的**]

   「··· の方法によって ··· を測定する」といった程度でよい。

2. [**実験の方法**]

   簡略にまとめよ。

3. [**実験の結果**]

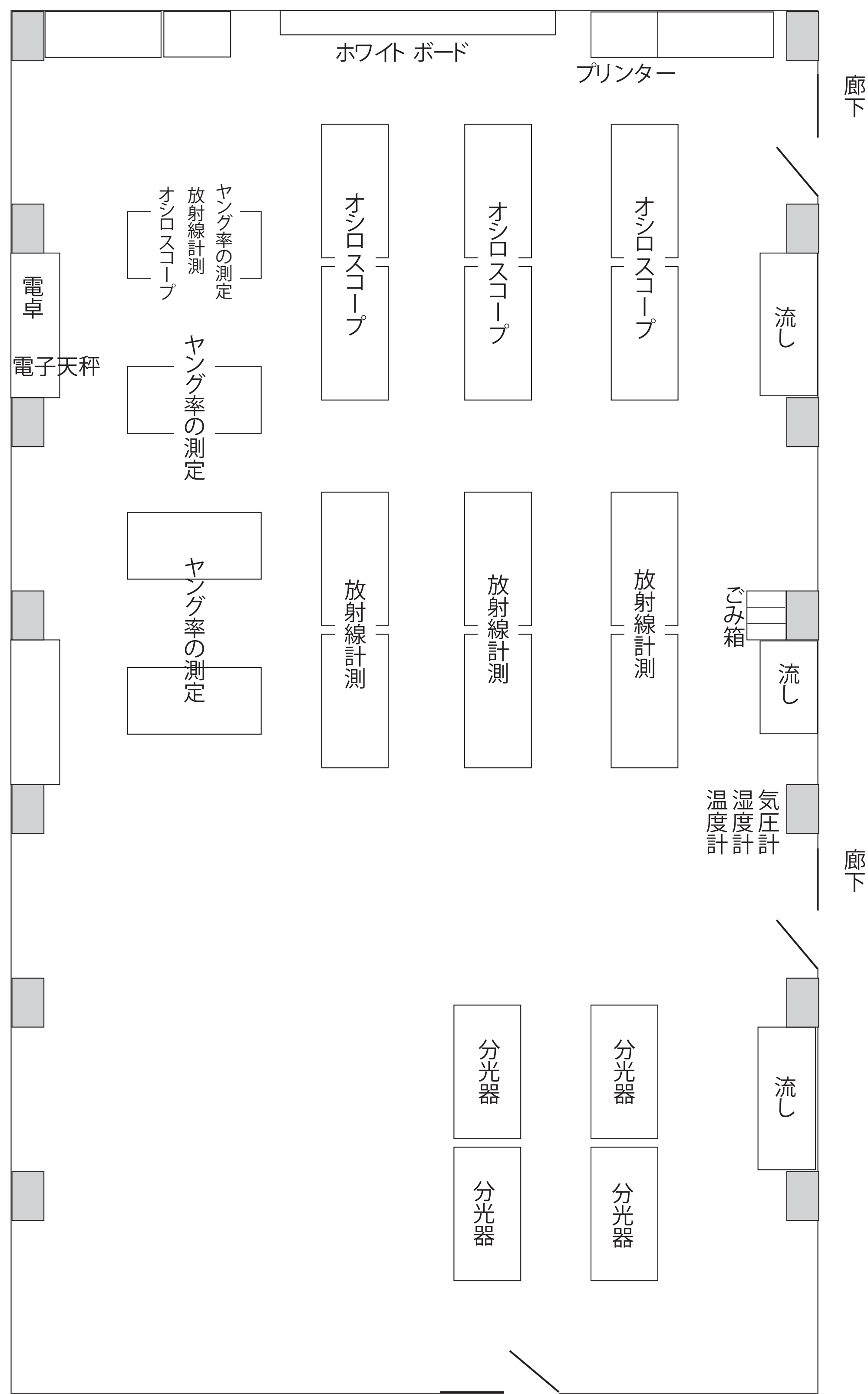
   測定値、計算結果、グラフ、計算の例などをわかり易く書く。また、課題についての結果、説明などを適切な箇所に書くこと。測定結果には、有効数字を考慮すること。また、単位を忘れないでつける。

4. [**考察**]

   考察のほかに検討、吟味、意見など適当な用語を選んで表題としたらよい。測定にあたって考慮したこと、感じたこと、装置または方法に対する改良意見、失敗とその原因、自分の得た測定結果と他の実験者との比較、検討などを記す。

[注意]
- 左綴できるように書くこと。提出時には左上を綴じること。右上を綴じてはいけない。
- 1, 2 の項目については簡潔にまとめること。実習書を書き写すようなことはしないこと。
- 3, 4 の項目をしっかり書くこと。
- グラフはコピー可。
- レポートをワープロで書くことは構わないが、式については手書きにすること。

C　実験室配置



ホワイト ボード
プリンター
廊下
ヤング率の測定
放射線計測
オシロスコープ
オシロスコープ
オシロスコープ
オシロスコープ
電卓
電子天秤
流し
ヤング率の測定
ヤング率の測定
放射線計測
放射線計測
放射線計測
ごみ箱
流し
気圧計
湿度計
温度計
廊下
分光器
分光器
分光器
分光器
流し

D　実験グループと課題

<table>
<tr><th>グループ
番号</th><th>5/15</th><th>5/21</th><th>5/22</th><th>5/28</th><th>5/29</th><th>6/4</th><th>6/5</th><th>6/11</th><th>6/12</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="24">注意事項
測定値とその取り扱い（演習）
グループ分け</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="8">レポート</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td rowspan="24">レポート</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td rowspan="8">レポート</td><td>4</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>13</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2" rowspan="8">レポート</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>15</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>4</td><td>3</td></tr>
</table>

課題番号		課題番号	
1	オシロスコープ	2	放射線計測
3	ヤング率の測定	4	分光器

II　測定値とその取り扱い

A　測定と誤差

実験においては種々の測定が行われる。得られた測定値は真の値とは異なる。測定を精密に行えば、測定値はより真の値に近付くかもしれないが、真の値を得ることはできない。よって、測定値がどれぐらい確からしいかを知ることが必要である。

誤差を

$$\text{誤差} = \text{測定値} - \text{真の値} \tag{1}$$

と定義する。測定の精密さは誤差の大きさだけでなく、測るものの大きさにも依存するので、

$$\text{相対誤差} = \frac{\text{誤差}}{\text{真の値または測定値}} \tag{2}$$

と相対誤差を定義し、測定の精粗を判断するのに用いる。実際には、相対誤差に 100 をかけて百分率で表わした百分率誤差を用いることが多い。

誤差は生ずる原因によって、系統誤差と偶然誤差に分けられる。

系統誤差

A. 理論的誤差

使用する理論の誤りまたは省略による誤差をさす。例えば、ヤング率の測定では分子間力（70 ページ、図 3.1）が問題となる。物体の変形が小さいときは、原子・分子間距離の変化 Δx も微小なはずだから、

$$\text{分子間力} \cong -k\Delta x$$

の近似を行なう。従って、物体の変形を大きくすれば、この近似による誤差は大きくなるが、近似の意味をよく理解し、変形を小さくすれば、その誤差をほとんどなくすことができる。

B. 機械的誤差

測定器具の不完全、使用法の誤りなどにより生ずる誤差。測定器具が、どの程度不完全であるかを判断するには、その器具の器差 (器械の目盛りと真値の差) がわかればよい。器具の取り扱い説明書には、この器差の大きさに関して、何らかの説明があるか、較正表がついているはずである。説明書をみて器差の大きさがわからなければ、最小目盛りの 1/2 から 1 倍程度の器差があるものと覚悟しておけば安全である。また、計量法や日本工業規格 (JIS) によって製品に対して許容されうる最大の器差を公差というが、この公差を知ることも、一つの目安になる。

C. 個人的誤差

観測者の性質、くせによる誤差。初心者では、特に器械の取り扱いが不慣れのために大きな誤差が生ずるから注意が必要である。例えば、長さの精密測定に用いるマイクロメーターを乱暴に扱えば最小目盛りの 1/2 程度の誤差はすぐに生じ、精密測定の意味がなくなる。また、測定値は最小目盛りの 1/10 まで読むが、最後の桁の読みは個人差が大きい。しかし、熟練すればこれらの誤差は取り除くことができる。

偶然誤差

観測者の支配し得ない環境、条件などの微細な変化により、偶然にしかも必ず生ずる原因不明の誤差。このような誤差は、次の３つの公理、

1. 絶対値が等しく符号が反対の誤差は現れる確率が等しい。
2. 絶対値が小さな誤差の起こる確率は大きな誤差の起こる確率より大きい。
3. 特に大きな誤差は実際上起こらない。

に基づいて、統計的に取り扱うことができる。

B　精度の検討

1種類の測定器で物理量を測定することを直接測定という。求めようとする量が、直接測定される量 $x, y, z, \cdots$ の関数として

$$w = F(x, y, z, \cdots) \tag{3}$$

で表わされているとする。このように数種類の測定値から求めたい物理量を得る場合を間接測定という。直接測定される量 $x, y, z, \cdots$ の誤差 $\delta x,\ \delta y,\ \delta z, \cdots$ が、どのように $w = F(x, y, z, \cdots)$ の誤差 δw に伝播するかについて考える。

$$\delta w = F(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, \cdots) - F(x, y, z, \cdots) \tag{4}$$

と定義する。関数 $F(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, \cdots)$ はテーラー展開（97 ページ、付録 L）を用いると級数に展開することができる。ここで、$\delta x,\ \delta y,\ \delta z, \cdots$ は微小な量であるはずなので、2 次以上の項は無視し、1 次の項の関係を求めると

$$\delta w = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \cdots \tag{5}$$

となる。式 (5) の両辺の絶対値をとり、

$$|\ \delta w\ | \quad = \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \cdots\right| \quad \leqq \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right||\delta x| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right||\delta y| + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right||\delta z| + \cdots \tag{6}$$

を得る。$|\ \delta w\ | = \Delta w,\ |\delta x| = \Delta x,\ |\delta y| = \Delta y,\ |\delta z| = \Delta z, \cdots$ とおくと、$w, x, y, z, \cdots$ は正の量として、

$$\frac{\Delta w}{w} \leqq \left|\frac{x}{F}\frac{\partial F}{\partial x}\right|\frac{\Delta x}{x} + \left|\frac{y}{F}\frac{\partial F}{\partial y}\right|\frac{\Delta y}{y} + \left|\frac{z}{F}\frac{\partial F}{\partial z}\right|\frac{\Delta z}{z} + \cdots \tag{7}$$

を得る。式 (7) は、各測定量の相対誤差 $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}, \frac{\Delta z}{z}, \cdots$ が、w の相対誤差 $\frac{\Delta w}{w}$ にどのように伝播するかを表わす式である。$\frac{\Delta w}{w}$ を小さくするためには、各測定量の相対誤差 $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}, \frac{\Delta z}{z}, \cdots$ が小さくなければならない。どれか一つの測定量の相対誤差が大きいと、$\frac{\Delta w}{w}$ はそれに支配される。逆に、ある一つの測定量をいくら精密に測定しても、他の測定量についても同様に精密な測定をしなければ、$\frac{\Delta w}{w}$ が大幅に小さくなることは期待できない。よって、式 (7) の右辺の各項がなるべく等しくなるように測定を計画することが大切である。

問 1. 式 (3) から式 (7) への導出過程をノートにまとめよ。

金属棒の体積の例

最小目盛 1 mm の巻尺と最小目盛 0.01 mm のマイクロメーターがある。いま、金属棒の長さ $\ell \cong 50$ cm, 直径 $2r \cong 1$ cm を測定し、その体積 $V = \pi r^2 \ell$ をできるだけ精度よく求めたい。どのような測定を行なえばよいだろうか。また、真の値からのずれはどの程度と予想されるだろうか。

巻尺およびマイクロメーターの器差はないとする。このとき、測定誤差は、主に個人誤差、偶然誤差によると考えられる。従って、測定にある程度熟練しているとすると、誤差は最小目盛りの 1/10 程度の大きさと考えられる。さて、そこで巻尺を用いて長さ及び直径の測定を行なったとすると、相対誤差に 100 をかけた百分率誤差は、それぞれ $0.01/50 \times 100 = 0.02\%$, $0.01/1 \times 100 = 1\%$ と予想される。一方、マイクロメーターで直径を測定したとすると百分率誤差は、$0.0001/1 \times 100 = 0.01\%$ と予想される。これらのことから、長さは巻尺を用い、直径はマイクロメーターを用いて測定すればよいことが分かる。しかし、このままでは V の百分率誤差がどの程度になるか、また、円周率 π の値として何桁までの値を用いるべきかは、はっきりしない。そこで、r, ℓ の誤差がどのように V の誤差として伝播するか調べる。

$$| r - r_0 |= \Delta r \ \ , \ \ | \ell - \ell_0 |= \Delta \ell \ \ , \ \ | \pi - \pi_0 |= \Delta \pi \tag{8}$$

とし、

$$| V - V_0 |= \Delta V \tag{9}$$

を計算すればよい。ここで、π_0, r_0, ℓ_0 は真の値を意味し、$V_0 = \pi_0 {r_0}^2 \ell_0$ である。$\Delta\pi,\ \Delta r,\ \Delta\ell$ は個々の要素の誤差の大きさだから、$\Delta\pi/\pi,\ \Delta r/r,\ \Delta\ell/\ell$ は微少量とみなせる。従って、これらの 2 次以上の項を無視して、$\Delta V/V$ の最大値を求めると、

$$\frac{\Delta V}{V} \leqq \frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{10}$$

を得る。式 (10) より、直径の測定は長さの測定に対して 2 倍精度をあげなければならないことがわかる。従って、予想通り、長さの測定は、巻尺を用い、直径の測定はマイクロメーターを用い、それぞれ最小目盛の 1/10 まで読むように努力し、測定回数も同じ程度におさえておけばよいことがわかる。また、このとき

$$2\frac{\Delta r}{r} \times 100 \cong 0.02\% \ \ , \ \ \frac{\Delta\ell}{\ell} \times 100 \cong 0.02\% \tag{11}$$

より、π の値は $\frac{\Delta\pi}{\pi} \times 100 \ll 0.02\%$ となるようにすべきで、従って、$\pi = 3.1416$ を用いればよいことがわかる。以上から V の精度は、百分率誤差で約 0.04 %以下と期待でき、このような測定で得られる V の有効数字は、約 4 桁となる。

問 2. 金属棒の長さと直径を

- 長さと直径を巻尺で測定した場合
- 長さと直径をマイクロメータで測定した場合

のそれぞれについて、体積の測定精度はどのようになるか。円周率は十分な桁をとって計算するものとする。

問 3. 式 (8) を式 (9) に代入し、微小量（ $(\Delta\ell/\ell)^2$ など Δ が 2 つ以上付いている項）を無視するような整理をすることで、式 (10) を導出せよ。

問 4. 式 (7) から式 (10) を導出せよ。

このような精度の検討により、

- 最適の測定器具を選択する。
- どの量の測定に注意をそそぐべきかの判断をする。たとえば、ある量の精度が他の量のそれに比較し著しく悪い場合、他の量の精度をいくらあげても時間の浪費にしかならないので注意を要する。
- π のような無限小数について、どこまでの桁を用いて計算するか判断する。

本実習における誤差の取り扱い

金属棒の体積の例では測定器具の不完全さ（機械的誤差）について考えなかった。実験には、必ず測定器具を用い、しかもこれらの器具の機械的誤差がかなり大きいことがある。そのような場合、測定器の目盛の較正を行わず、最小目盛の 1/10 まで読んだとしても意味がない。本来実験は測定器具の較正から始めるのが常道である。しかし、学生実験では、特に指定がない限り較正を行わないで済ます。これは、較正自身がそれほど簡単ではなく、また時間を要し、学習すべき実験の主旨から外れてしまうからである。

測定器具の較正は教官にまかせてもらうことにして（一部例外がある !)、測定で生じる種々の誤差の検討を行い、どの程度の精度の実験を行うかの考察ができるようになることが実験の主旨のひとつである。

C　偶然誤差の統計的性質

ある物理量の測定において、系統誤差は無視できるほど小さいとして、偶然誤差のみを考える。測定は何回でも繰り返し行うことができるので、測定値を要素とする集合の要素数は無限であると考えてよい。いま、この無限個の要素が可能な測定値をすべてつくしているとする。このとき、この物理量の母集団が定まったという。統計学の知識を用いると、母集団から無作為抽出された測定値の分布は、図 1 のような真値 X を平均とする正規分布に従うことが分かる。このとき、標準偏差 σ は測定値の ばらつき を表している。

ある測定値 x が

$$X - \sigma \leqq x \leqq X + \sigma \tag{12}$$

となる確率 P は、

$$P = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} f(x)dx = 0.682689492\cdots \tag{13}$$

となる。式 (12) は

$$x - \sigma \leqq X \leqq x + \sigma \tag{14}$$

と同値であるから、測定値 x が得られたとき、$x - \sigma$ から $x + \sigma$ の間に真の値 X が入る確率は約 68% であることが分かる。

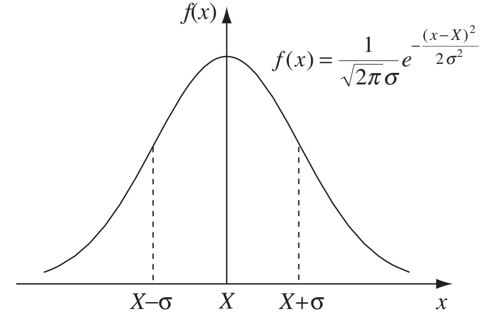


図 1: 正規分布

いま n 回の測定を行い、その平均値を求めたとする。このような n 回の測定は無限に繰り返し行うことが可能である。各 n 個の測定値から平均値が一つずつ得られるから、それらを集めて一つの集合をつくると、それらは新たな母集団を作る。この母集団の要素数は無限で、その要素の分布は、平均値を X、標準偏差を

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

とする正規分布になることが知られている。

D　測定値の信頼度

ある物理量を n 回測定し、測定値 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ を得たとする。これら n 個の測定値を、C 節で考えた母集団から取り出した標本と捉え、真の値を推定することを考える。

この物理量の真値を X, 偶然誤差を $\varepsilon_i = x_i - X$ とするとき、

$$s = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2}{n}} \tag{16}$$

なる量を平均二乗誤差と呼ぶ。ところで、真値 X は理想値で実際には求めることのできない量なので、平均値 $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ を用いて平均二乗誤差を求めることを考える。まず、測定値の平均値からのずれ

$$\Delta_i = x_i - m \tag{17}$$

を残差といい、誤差 ε_i を用いると、

$$\Delta_i = \varepsilon_i + (X - m) \tag{18}$$

と表わされる。式 (18) の両辺を 2 乗し、i について 1 から n まで和をとると、

$$\sum_{i=1}^{n} {\Delta_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 + 2(X - m)\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + n(X - m)^2 \tag{19}$$

となる。$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - X) = \sum_{i=1}^{n} x_i - nX = n(m - X)$ に注意すれば、式 (19) は

$$\sum_{i=1}^{n} {\Delta_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 - n(X - m)^2 \tag{20}$$

となる。ところで $(X-m)^2$ は

$$
\begin{aligned}
(X-m)^2 &= \left(X-\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\Big[(X-x_1)+(X-x_2)+\cdots\cdots+(X-x_n)\Big]^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2+\frac{2}{n^2}\sum_{i<j}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j \qquad (21)
\end{aligned}
$$

と変形できる。ここで、$\displaystyle\sum_{i<j}$ は $1 \leqq i < j \leqq n$ をみたす、すべての (i,j) の組にわたる和を表す。さて、測定値 x_i が真値 X より大きくなる確率と小さくなる確率は同じはずなので、誤差 ε_i には正と負の値が同じ回数だけあらわれることになる。従って、$\displaystyle\sum_{i<j}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j$ の和に正負の項が同じように現れ打ち消しあい、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2$ に比べてはるかに小さいことが期待でき、無視することができて、

$$
(X-m)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2 \qquad (22)
$$

となる。式 (22) を式 (20) に代入すると、

$$
\sum_{i=1}^{n}{\Delta_i}^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2 \qquad (23)
$$

が得られる。式 (16) と式 (23) より、平均二乗誤差は

$$
s = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{\Delta_i}^2}{n-1}} \qquad (24)
$$

となる。

また、平均値の真値からのずれの程度を表わす量として、平均値の平均二乗誤差 s_m

$$
s_m = \sqrt{(m-X)^2} \qquad (25)
$$

が考えられる。式 (16), (22), (24) より、

$$
s_m = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{\Delta_i}^2}{n(n-1)}} \qquad (26)
$$

となることがわかる。ここで、平均二乗誤差 s は、測定方法、測定環境、測定者などによって大きさが変化する量である。いい加減な測定をすれば平均二乗誤差 s は大きな値となってしまう。しかし、実際の測定値に関する誤差は平均値の平均二乗誤差 s_m で、これは測定回数とともに小さくなっていく。ただし、小さくなるといっても、$1/\sqrt{n}$ 程度であって、労力はさほど報くわれない。

問 5. 式（16）から式 (26) までの説明をノートにまとめて、式変形と議論を確認せよ。

測定結果の表し方

平均二乗誤差として s と s_m の 2 種類がでてきたが、s は個々の測定値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の誤差に関するもので、s_m は平均値 m に関するものである。

ここで、s_m は測定回数 n が十分に大きいとき、平均値に関する母集団の標準偏差 σ_m とみなせる量である。実際には測定回数 n は 10 回程度と少ないので、母集団の標準偏差 σ_m の代わりに s_m を用いて、母平均（真値） X を区間推定することになる。この意味で、測定結果 m と s_m によって真値 X が

$$m - s_m \leqq X \leqq m + s_m \tag{27}$$

という範囲に存在する確率は 68.26% 、あるいは

$$m - 0.6745\ s_m \leqq X \leqq m + 0.6745\ s_m \tag{28}$$

という範囲に存在する確率は 50% である。

ただし、これらの区間推定の方法では、測定回数が極端に少ない場合や信頼度を更に一層たかめたい場合には、そのまま使うことはできない。このときには小標本法と呼ばれる方法を用い、

$$m - t \cdot s_m \leqq X \leqq m + t \cdot s_m \tag{29}$$

の不等式を利用すればよい。t の値は有意水準 (1 − 信頼係数) と自由度 ($n - 1$ に相当する) の関数として多くの統計学の本に表としてまとめられている。なお、推計、検定に関する本は図書館にたくさんあるので、より詳しいことを知りたい人は調べるとよい。

具体的な例として、金属棒の直径の測定から 平均値 $m = 1.235$ cm, 誤差 $s_m = 0.175$ cm が求められたとする。これは、r の真値が、確率 68.26 % で

$$1.235 - 0.175 \leqq r \leqq 1.235 + 0.175 \tag{30}$$

の範囲にあることを意味する。より簡潔には、直径 r の測定結果を

$$r = 1.235 \pm 0.175 \text{ cm} \tag{31}$$

のようにまとめて表す。平均値と誤差の「和」と「差」は測定結果の範囲を表すので、少数点下の数字の個数は、そろっていなければならない。すなわち、

$$r = 1.235 \pm 0.17 \text{ cm} \tag{32}$$

のように 書いてはいけない。通常、平均値や誤差を計算すると多くの数字が得られる。正確を期すために

$$r = 1.23456789 \pm 0.17465432 \text{ cm} \tag{33}$$

と書いても間違いではないが、極めて分かりにくい表記だし、多くの数値を書くことには意味がない。特別な理由がないがぎり、最終結果のまとめは簡潔さに重きをおく。この例の場合、小数点下 1 桁目に誤差があるので、それ以下の桁は大きな意味を持たない。したがって、

$$\underline{r = 1.2 \pm 0.2 \text{ cm}} \tag{34}$$

のように表す。つまり、直径 r の測定について、「有効数字」は $r = \dot{1}.\dot{2}$ の 2 桁である。誤差の精度が気になるような場合は、誤差の 2 桁目まで表記することもあり、

$$r = 1.23 \pm 0.17 \text{ cm}$$

と書くことになる。このときは、直径 r の「有効数字」は $r = \dot{1}.2\dot{3}$ の 3 桁となる。(この実習では誤差は数字ひとつで十分!)
いずれにしても、誤差が求まらないと「有効数字」は定まらないことに注意されたい。

また、金属棒の体積 V について、平均値 $m = 3.927 \times 10^{-5}$ m^3, $s_m = 1 \times 10^{-8}$ m^3 と求められたとする。この場合、

$$V = (3.927 \pm 0.001) \times 10^{-5} \text{ m}^3 \tag{35}$$

のように、指数部分をまとめて表す。

問 6. 金属棒の長さを測定した時、右表のような結果を得た。それぞれの場合について、「平均値」および「平均値の平均 2 乗誤差」を求めよ。

2 回の測定		3 回の測定	
x_1	50.1 cm	x_1	50.1 cm
x_2	49.9 cm	x_2	50.0 cm
		x_3	49.9 cm

問 7. 平均値の平均 2 乗誤差 s_m について、同様な測定を 10 回行なった場合の平均値の平均 2 乗誤差 $s_{m_{10}}$ と、100 回行なった場合の平均値の平均 2 乗誤差 $s_{m_{100}}$ の比 $s_{m_{10}}/s_{m_{100}}$ を概算して、誤差は およそ $1/\sqrt{n}$ (n は測定回数) で小さくなることを確認せよ。式 (26) の $\Delta_i{}^2$ はすべて等しいと考えればよい。

E 間接測定値の誤差

求めようとする量 w が、直接測定される量 $x, y, z, \cdots$ の関数

$$w = F(x, y, z, \cdots) \tag{36}$$

で与えられるとする。$x, y, z, \cdots$ の測定の平均値及び真値をそれぞれ $m_x, m_y, m_z, \cdots$ 及び $X, Y, Z, \cdots$ とする。$m_w = F(m_x, m_y, m_z, \cdots), W = F(X, Y, Z, \cdots)$ と定義すると、m_w の平均二乗誤差 s_{m_w} は

$$s_{m_w} = \sqrt{(m_w - W)^2} \tag{37}$$

と表される。ここで、$X = m_x + (X - m_x),\ Y = m_y + (Y - m_y),\ Z = m_z + (Z - m_z), \cdots$ (ただし、$X - m_x,\ Y - m_y,\ Z - m_z, \cdots$ は小さい) とすると

$$\begin{aligned} W &= F(X, Y, Z, \cdots) \\ &= F(m_x, m_y, m_z, \cdots) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (X - m_x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (Y - m_y) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot (Z - m_z) + \cdots \end{aligned} \tag{38}$$

となる。ここで、$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \cdots$ は、$x = m_x, y = m_y, z = m_z, \cdots$ での値をとる。式 (38) を式 (37) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
s_{m_w} \quad = \quad & \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (m_x - X) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (m_y - Y) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} \cdot (m_z - Z) \right\}^2 \right. \\
& \left. + \cdots\cdots + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (m_x - X)(m_y - Y) + \cdots\cdots \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

となる。式 (25) より

$$
(m_x - X)^2 = (s_{m_x})^2, \quad (m_y - Y)^2 = (s_{m_y})^2, \quad (m_z - Z)^2 = (s_{m_z})^2, \cdots \qquad (40)
$$

と表すことができる。また、$(m_x - X)(m_y - Y)$ などの異なる量の 1 次の積は

$$
(m_x - X)(m_y - Y) = \frac{1}{n_x n_y} \{(x_1 - X) + \cdots + (x_{n_x} - X)\}\{(y_1 - Y) + \cdots + (y_{n_y} - Y)\} \qquad (41)
$$

のように書き表すことができる。ここで、n_x, n_y は物理量 x, y の測定回数である。よって、式 (41) のような項は、10 ページの $\sum_{i<j}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j$ と同様に、式 (40) のような項にくらべてはるかに小さいことが期待でき無視できる。従って、

$$
\frac{s_{m_w}}{m_w} = \left[\left(\frac{m_x}{m_w} \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{s_{m_x}}{m_x} \right)^2 + \left(\frac{m_y}{m_w} \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{s_{m_y}}{m_y} \right)^2 + \left(\frac{m_z}{m_w} \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{s_{m_z}}{m_z} \right)^2 + \cdots \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (42)
$$

となる。

問 8. 式 (36) から式 (42) への導出過程をノートにまとめよ。

問 9. 金属棒の例（7 ページ）において、長さの測定の結果、平均値 50.00 cm、平均値の平均二乗誤差 0.1 mm となり、直径の測定の結果、平均値 1.0000 cm、平均値の平均二乗誤差 0.001 mm となったとする。

(1) 金属棒の体積の平均値 m_V を求めよ。

(2) 金属棒の体積の相対誤差 s_{m_V}/m_V を求めよ。(7 ページでは、この相対誤差を 0.04% 以下と見積もった。)

(3) 金属棒の体積の誤差 s_{m_V} を求めよ。

(4) 有効数字を考慮して、体積の結果としてまとめて書くとどのように書けるか。数値の表記方法に注意すること（11~12 ページ）。

F　最小二乗法

二つの物理量を測定して $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ という測定値の組が得られたとき、これらの測定点を方眼紙に描くと、これらの測定点を通るような直線が引けるとする。測定点は誤差を含んでいるので、必ずしも全ての測定点が直線上にあるわけではない。そこで、これらの測定点に最もよく当てはまる直線 $y = Ax + B$ を求めることを考える。

x の値に誤差がないとする。このとき A と B がわかれば、y の真の値は $Ax + B$ より得ることができる。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値に対応して $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*$ が真の値だとすれば、すべての点 $(x_1, y_1^*), (x_2, y_2^*), \cdots, (x_n, y_n^*)$ が一直線上に並ぶ。これらの測定点での y の測定値の誤差は

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= y_1 - y_1^* = y_1 - Ax_1 - B \\
\varepsilon_2 &= y_2 - y_2^* = y_2 - Ax_2 - B \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\
\varepsilon_n &= y_n - y_n^* = y_n - Ax_n - B
\end{aligned}
$$

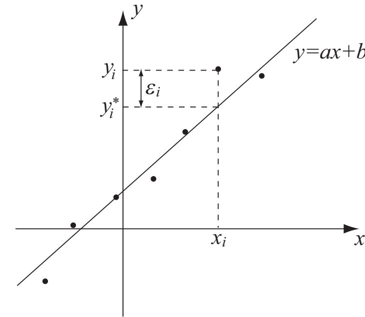


図 2: 最小二乗法

である。ここで

$$
\begin{aligned}
E &= {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2 \\
&= (y_1 - Ax_1 - B)^2 + (y_2 - Ax_2 - B)^2 + \cdots + (y_n - Ax_n - B)^2
\end{aligned}
$$

とおき、E を最小にするような A, B を求める。このような A, B の求め方を最小二乗法という。E は A, B に依存し、それぞれの微分は最小値においてゼロとなるので

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2A\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i + 2B\sum_{i=1}^{n}x_i = 0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 2nB + 2A\sum_{i=1}^{n}x_i - 2\sum_{i=1}^{n}y_i = 0 \tag{44}$$

となる。式 (43),(44) は A, B に関する連立方程式 (これを “正規方程式” という) となっており、

$$A = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \tag{45}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 \sum_{i=1}^{n}y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \tag{46}$$

と求められる。尚、片対数グラフで直線になったときは (x_i, y_i) を $(x_i, \log y_i)$ に置き換えればよい。

同様な方法によって、データ点の組を最もよく近似する曲線をもとめることができる。どのような関数であるかは、あらかじめ予想しなければならないが、関数の形（２次関数だとか指数関数だとか）さえ分かっていれば、最適な係数が何であるかをもとめることができる。このような作業は連立方程式を解くことに帰着する。また、表計算ソフトには簡便に最適関数をもとめる機能がある（25 ページ）。

G　周期的量の平均値

振子の周期のような周期的量の平均値を求める場合には注意が必要である。例えば、振子が中央の目標線を右に向かって通過する時刻を毎回測定し、$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_9$ を得たとする。このとき、

$$t_1 - t_0 = T_1\ ,\ t_2 - t_1 = T_2\ ,\ \cdots\ ,\ t_9 - t_8 = T_9 \tag{47}$$

はいずれも振子の周期になるが、これらの平均値を求め、

$$T = \frac{T_1 + T_2 + \cdots + T_9}{9} \tag{48}$$

としてはならない。なぜなら、式 (48) は、

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + \cdots + T_9 &= (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots + (t_9 - t_8) \\ &= (t_9 - t_0) \end{aligned} \tag{49}$$

		5 回振動の周期
t_0	t_5	$t_5 - t_0$
t_1	t_6	$t_6 - t_1$
t_2	t_7	$t_7 - t_2$
t_3	t_8	$t_8 - t_3$
t_4	t_9	$t_9 - t_4$
平均		τ

表 1: 周期的量の平均値

となっている。すなわち、T は t_0 と t_9 のみに依存し、途中の計測 $t_2 \sim t_8$ によらない。従って、途中の計測は全く無意味なものになる。そこで、このような場合、表をつくり (表 1 参照)、例えば 5 回振動の周期の平均値 τ を求めてやれば、途中の計測がすべて意味をもってくる。振子の平均周期は $T = \frac{\tau}{5}$ として得られる。

H　グラフの使い方

目盛りは、グラフが横軸または縦軸の一方の軸に著しく偏ることのないようにとる。測定点は、●×◎△などを用いてわかりやすく示し、誤差がグラフ上で判別できるほど大きい場合は ⌶ のような誤差棒をつけて表わす。各測定点を結ぶのは、折れ線ではなく、すべての測定点のなるべく近くを通るような直線または滑らかな曲線を引く。グラフの表題や横軸、縦軸の単位などは忘れずに書く。

片対数 (semi-log) グラフ

2 つの量　x, y の関係を示す実験曲線が

$$y = a\,\mathrm{e}^{bx} \tag{50}$$

の形になるときは、

$$\log_{10} y = Y,\ \ \log_{10} a = A,\ \ b\,\log_{10}\mathrm{e} = B \tag{51}$$

とおけば、この曲線の関係式を

$$Y = A + Bx \tag{52}$$

と直線で表わせる。従って、測定点 $(x,\ y)$ に対応する点 $(x,\ Y)$ を求め、x と Y の関係が直線になっていれば、グラフから $A,\ B$ を読み取ることができ、式 (50) を求めることができる。このような目的のために、縦軸の目盛りがすでに $\log_{10} y$ でとってあるのが片対数グラフである。

問 10. 式 (52) を導出せよ。

片対数グラフの使用例を以下に示す。

x	1	2	3	4	5
y	2.7	3.3	4.2	5.5	7.0

上表のような測定点が図 3 のように片対数のグラフで直線にのったとする。片対数のグラフの縦軸は、すでに $\log_{10} y$ の値を目盛ってある。よって、

$$\log_{10} y = A + B\,x \tag{53}$$

とおいたときの A, B はグラフから直接、

$$A = \log_{10} 2 \tag{54}$$

$$B = \frac{\log_{10} 7 - \log_{10} 2}{5} \tag{55}$$

とわかる。これより、

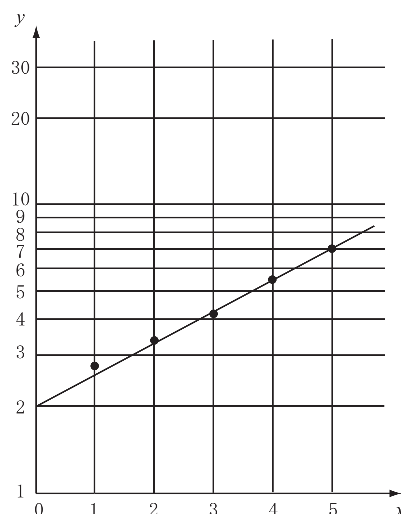


図 3: 片対数グラフ

$$\log_{10} y = \log_{10} 2 + \frac{x}{5} \log_{10} \frac{7}{2} \tag{56}$$

だから

$$y = 2 \left(\frac{7}{2} \right)^{\frac{x}{5}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{5} \log_e \frac{7}{2}} \tag{57}$$

である。$\log_e \frac{7}{2} \sim 1.25$ より

$$y = 2\,\mathrm{e}^{0.25x} \tag{58}$$

と指数関数で表わされることがわかる。

[参考書]

1. N.C. バーフォード 著、酒井英行 訳 「実験精度と誤差」 (丸善)
2. J.R. テーラー著、林茂雄、馬場凉 訳 「誤差解析入門」 （東京化学同人）
3. 吉澤康和 著 「新しい誤差論」 (共立出版)

I　コンピュータによるデータ処理

本実習では、コンピュータによるデータ処理を行なう。測定された数値を使って様々な計算を行ない、グラフを作ったりするためには表計算ソフトを使うと便利なことが多い。以下に実習で用いる表計算ソフトについて簡単な説明をする。詳細については、実験室にあるマニュアルやヘルプメニューを参照されたい。また、コンピュータの基本操作については既知のものとして、説明を省略する。操作方法が分からない学生は、この機会にぜひ教官やグループのメンバーに質問をして習得してもらいたい。



図 4: デスクトップ

1. 起動

ウインドウズ[†]の画面に、表計算用の「Excel」と文書作成用の「Word」という名のアイコンが用意されている。ソフトの起動は、目的のアイコンにマウスのポインター（矢印）を重ねて、マウスの左ボタンを２回連続して押す（ダブル・クリック）ことで行なう。

2. 基本操作

Excel を起動すると図 5 の画面が表示される。マス目をセルと呼び、横方向のセルの集まりを「行」、縦方向のセルの集まりを「列」と呼ぶ。「行」は 1, 2, 3, ···、「列」は A, B, C, ··· のように名付けられている。目的のセルにマウスのポインターを重ねてクリックすると、セルが太い枠で囲まれた状態となり、セルを選択することができる。図 5 は「セル C3」を選んだ状態である。セルを選択して数値や文字を入力し [Enter] キーを押すと、選択されたセルは一つ下の行に移る。数値を入力し [Enter] キーを押すという操作を繰り返すと、一つの列に数値を入力することができる。

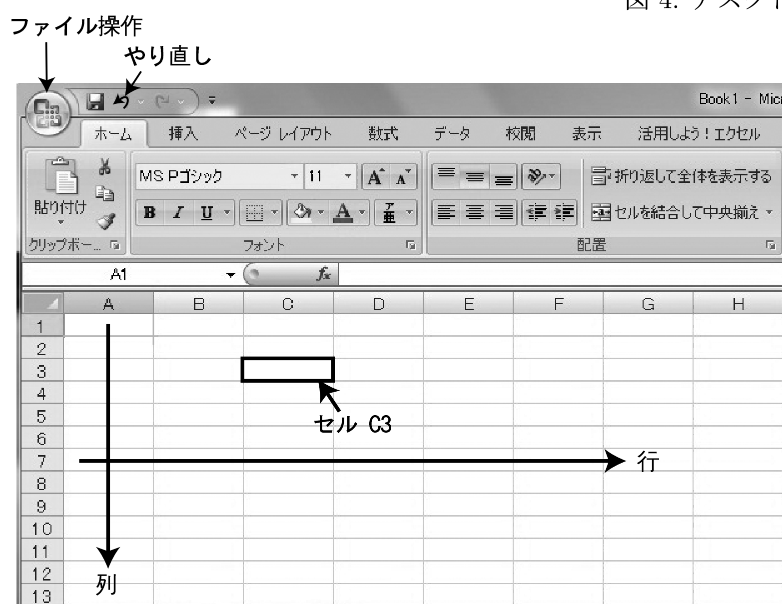


図 5: Excel の画面

　編集したファイルを保存したり印刷するためには、画面左上にある をクリックしてメニューから操作を選択する。また、編集に間違いをした場合、「やり直し」の機能は有用である。

[†]解説は Windows 7 についてのものである。Windows2000 についての解説は別ファイルにある。

3. 規則的な数値の入力

列 A に 1, 2, 3, $\cdots$, 10 という連続した数値を入力する必要があるとしよう。このような場合、以下のような操作を行なうことで、数値の規則を反映したデータの自動入力をすることができる。

(1) 最初の２つの数値（「１」と「２」）を入力する。

(2) マウスのポインターを 1 に持っていって、左ボタンを押す。そのままボタンを離さずに マウスのポインターを 2 まで動かして ボタンを離す。（このような操作を「ドラッグ」という。）結果、下の左図のように２つのセルが黒くなる。

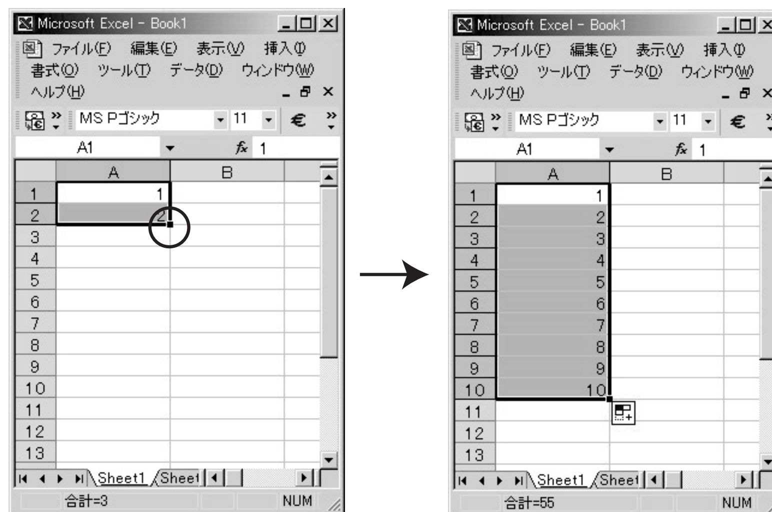


図 6: 規則的な数値の入力

(3) 黒い枠の右下の「黒い点」にマウスのポインターを重ねて、左ボタンを押す。

(4) そのままボタンを離さずに マウスのポインターを１０行目まで動かして、ボタンを離す。

4. 式による計算

測定データを代入して式の計算をすることを考える。たとえば、列 A に 1, 2, 3, $\cdots$, 10 の数値が入力されているとして、$1^2+10, 2^2+10, 3^2+10, \cdots, 10^2+10$ を計算してみる。

(1) セル B1 を選択して、「=A1^2+10」と入力する。「A1」はセル A1 に入力されている数値 1 を表しており、「^2」はそれを自乗する計算を意味する。

(2) セル B1 に式を入力（[Enter] を押す）すると、セル B1 に 1^2+10 の計算結果 11 が表示される。

(3) 「規則的な数値の入力」と同じ方法で、セル B1 を選択して右下の黒い点をセル B10 までドラッグする。

(4) この結果、列 B には $1^2+10, 2^2+10, 3^2+10, \cdots, 10^2+10$ の計算結果 11, 14, 19, $\cdots$, 110 が表示される。

(5) セル B1 から B10 までを順に選択してみると、表のすぐ上に式 =A1^2+10, =A2^2+10, =A3^2+10, $\cdots$, =A10^2+10 が表示される。

(6) 式を修正したいときは、式が表示されている枠をクリックし、[←], [→], [Back Space], [Delete] を使って式の変更を行なう。

(7) 間違った操作をして変な状態になったときは、キーボード左上にある [Esc] を押すことをお勧めする。

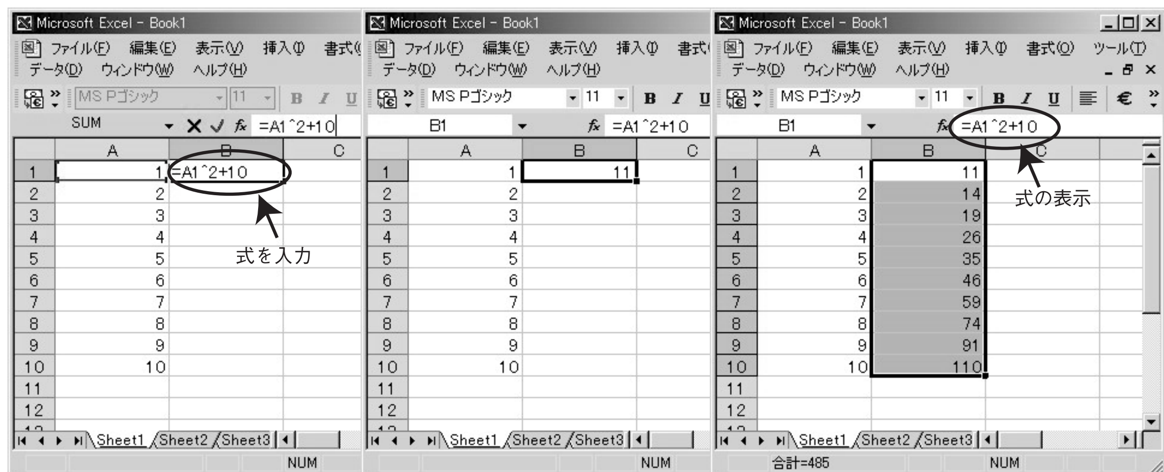


図 7: 式による計算

5. 可変定数を含む式の計算

上の例では「+10」を式に直接書いた。多くの場合、このような定数は完全に固定されたものではなく、場合によって簡単に変更できることが望ましい。そのような場合、「10」という数値を入力したセルを作り、それを式に使うことができる。

(1) セル C1 に数値 10 を入力する。

(2) このセルを数値を使って上と同様な計算をするには、セル B1 に「=A1^2+C1」と入力すればよい。図 8(a) のように「11」と正しい結果が得られる。

(3) これを自動入力の方法を使って B2∼B10 のセルに反映させてみると、図 8(b) のように B2 から B10 までの式は、=A2^2+C2, =A3^2+C3, $\cdots$, =A10^2+C10 となってしまう。

(4) 式に現れる「C1」は変更しないように表計算ソフトに指示する必要がある。このような場合は、図 8(c) のように「C1」と書くことになっている。



図 8: 可変定数を含む式の計算

6. 演算と関数

表計算ソフトには基本的演算と多くの関数が用意されている。その中で、実習に有用なものを解説する。その他の関数の使い方については、上部メニューの「数式」をクリックし、「f_x 関数の挿入」を選び、現れる画面の「この関数のヘルプ」を参照されたい。

表 2: 表計算の演算と関数

記号	意味	使用方法（例）	解説
+	足し算	A1+B1	
−	引き算	A1−B1	
*	掛け算	A1*B1	
/	割算	A1/B1	A1/B1*C1 は (A1/B1)*C1 と見なされる
∧	べき乗	A1^ 3	セル A1 の値を 3 乗する
&	文字列の結合	”>=”&A1	>=と A1 に書かれている文字がつながる
PI	円周率	PI()	
SQRT	$\sqrt{x}$	SQRT(A1)	
SIN COS TAN	三角関数	SIN(A1) COS(3.1415) TAN(PI())	角度はラジアンで入力
EXP	e^x	EXP(A1)	$e = 2.718281\cdots$ のべき乗
LN	$\log_e(x)$	LN(A1)	$e = 2.718281\cdots$ を底とする対数
LOG10	$\log_{10}(x)$	LOG10(A1)	10 を底とする対数
POISSON Windows7 の場合	ポアッソン 分布	POISSON(数値, 平均値,FALSE) POISSON(235,265.3,FALSE)	平均値が 265.3 の場合について計測数 235 についてポアッソン分布の値を求める
POISSON2 Windows2000 の場合	ポアッソン 分布	POISSON2(数値, 平均値,FALSE) POISSON2(235,265.3,FALSE)	平均値が 265.3 の場合について計測数 235 についてポアッソン分布の値を求める
SUM	合計	SUM(数値 1, 数値 2, 数値 3,$\cdots$) SUM(A1:A100)	数値 1+数値 2+数値 3+$\cdots$ セル A1 から A100 の数値の合計
COUNTIF	条件を満たす セルの個数	COUNTIF(A1:A100, ”>= 265”)	セル A1 から A100 のうち、表示されている 数値が 265 以上の値であるセルの個数
AVERAGE	平均値	AVERAGE(A1:A100)	セル A1 から A100 の数値の平均値
FREQUENCY	頻度分布	FREQUENCY(A1:A100,10)	セル A1 から A100 の数値が 10 以下のセルの個数

7. グラフ

7.1 基本操作

表計算ソフトには様々なグラフを作る機能がある。グラフに表すためのデータが準備されているとする。

(1) 下図のように、必要なデータをマウスをドラッグすることで選択する。

この例の場合、列 A が横軸（x 軸）、列 B が縦軸（y 軸）の値となる。

(2) 上部のメニューの「挿入」をクリックすると、「グラフ」の種類を選択する画面が現れる。「縦棒」「折れ線」「円」「横棒」面」「散布図」などが選べるようになっているが、本実習では主に 散布図 を使用する。目的のグラフの種類を選ぶと図 9 のようにグラフが作成される。

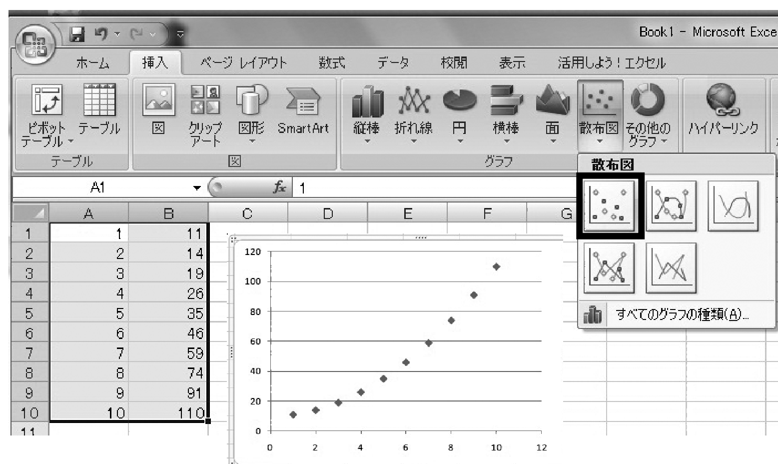


図 9: グラフの作成（その１）

(3) グラフの加工をするには、データ点を右クリック (a)、グラフの枠内を右クリック (b)、グラフの枠外を右クリック (c)、軸を右クリック (d) することで、メニューからさまざまな加工を選ぶことができる。

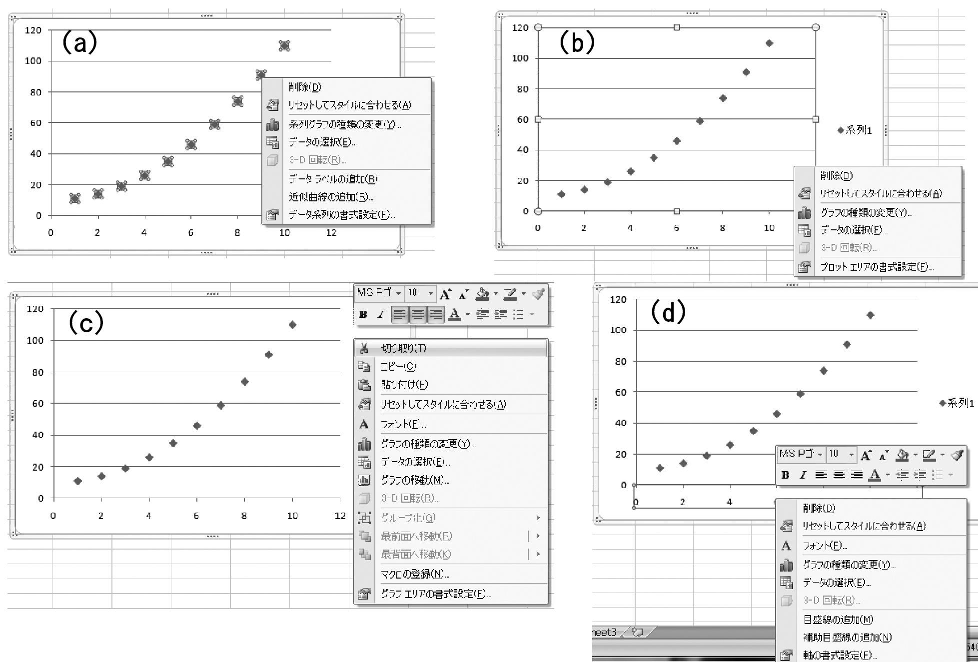


図 10: グラフの作成（その２）

(4) 「データの選択」は、グラフを描くためのデータを変更したり追加するための機能である。「データの選択」を選ぶと、図 11(a) の画面が現れる。「系列１」はグラフに表したデータを示している。複数のデータがある場合は、ここに「系列２」「系列３」などと表示される。編集したいデータ（ここでは「系列１」）を選択して「編集」のボタンを押すと、図 11(b) の画面が現れる。これは、「系列 X の値」はグラフに用いる X 座標のデータの位置を示している。同様に「系列 Y の値」は Y 座標のデータの位置である。「系列名」に文字を入力すると、グラフ上にデータの意味を表示することができる。

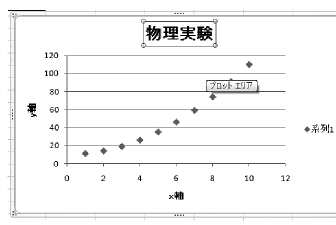
(a)


(b)


図 11: グラフの作成（その３）

(5) 上段のメニューから「グラフのレイアウト」を選ぶと、グラフのタイトル、軸の名称などを付けることができる（図 12）。





(c) (d)

図 12: グラフの作成（その４）

7.2 グラフの修正

グラフを作ってから修正をすることができる。たとえば、データポイントを滑らかな曲線で結んでみよう。

(1) グラフの上のデータ点を選択して、右クリックする（下図 (e)）。

(2) 「系列グラフの種類の変更」を選択する。

(3) グラフの種類を決めるためのメニュー（下図 (f)）が現れるので、「散布図（平滑線）」を選ぶ。



(e) (f) (g)

図 13: グラフの作成（その５）

7.3 対数グラフ

縦軸の値が指数関数的に変化する場合、等間隔目盛のグラフでは様子がよく分からない。実習では「放射線計測」の「吸収係数の測定」が例である。そのような場合、対数目盛のグラフを用いることが有用である。対数目盛のグラフでは、指数関数は直線として表されることになる。（15 ページの片対数グラフ参照）これまで例に取り上げたグラフの縦軸を対数目盛に変更してみる。

(1) グラフの y 軸付近を左クリックで選択し、つづいて右ボタンをクリックする（右図 (h)）。

(2) 右図 (h) のようなメニューが現れる。このメニューの中から「軸の書式設定」を選択する。

(3) メニューのなかで「対数目盛を表示する」をチェックすると、右図 (j) のように縦軸が対数目盛に変更される。



図 14: 対数グラフ

7.4 棒グラフと曲線グラフの混在

図 (a) のような x 軸用のデータと y 軸用のデータ（２つ）が用意されているとする。

(1) y 軸用のデータのみを選択（マウスでドラッグ）する。（図 (a)）

(2) グラフ作成のメニューから「縦棒」（図 (b)）を選択する。

(3) 図 (c) のように、y 軸用データから 2 種類の棒グラフが作られる。ここで、横軸はデータの順を表す数値となっている（セルの番号ではない）。

(4) 曲線で表したい方の棒グラフを判別して、その棒（どれでもよい）をマウスで右クリックする。

(5) メニューの中から「グラフの種類の変更」を選ぶ。

(6) グラフの形式を決定するための入力要求（図 (d)）で「散布図（平滑線）」を選択し、データ点を曲線でつなぐように指示する。

(7) 図 (e) のように、片方のグラフが曲線となる。

(8) 横軸の数値を変更するために、グラフの領域で右クリックし、メニューの中から「データの選択」を選ぶ。

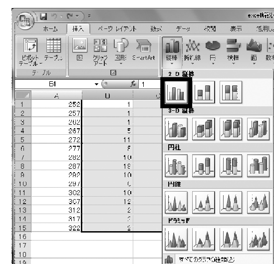
(9) 図 (f) の画面において、「横（項目）軸ラベル」の編集ボタンを押す。

(10) 「項目軸ラベルの範囲」に x 軸のデータの書かれている場所を指定する（図 (g)）。

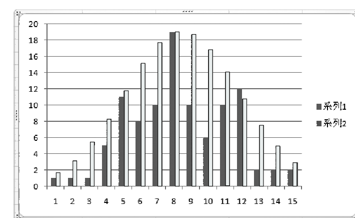
(11) 図 (g) のように x 軸の数値が変更される。

	A	B	C
1	252	1	1.703
2	257	1	3.188
3	262	1	5.415
4	267	5	8.363
5	272	11	11.763
6	277	8	15.095
7	282	10	17.702
8	287	19	19
9	292	10	18.695
10	297	6	16.888
11	302	10	14.026
12	307	12	10.725
13	312	2	7.561
14	317	2	4.92
15	322	2	2.858

(a)



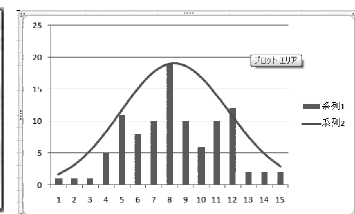
(b)



(c)



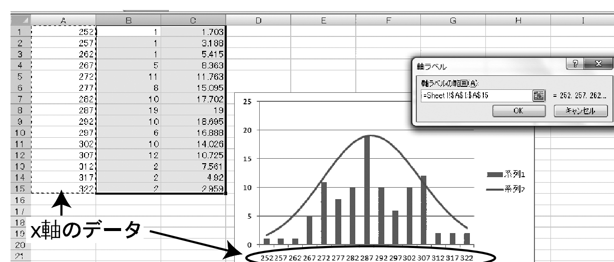
(d)



(e)



(f)



(g)

図 15: 棒グラフと曲線グラフの混在

7.5 近似曲線

表計算ソフトにはグラフのデータ点をできるだけ通るような近似曲線をもとめる機能がある。これには、最小二乗法（14 ページ）が用いられている。

- グラフのデータ点を右クリックして、メニューから「近似曲線の追加」を選ぶ。
- 図 (b) のようなメニューが現れるので、適切な近似曲線の種類を選択する（ここでの例は指数関数）。
- 近似曲線の式を知りたければ、「グラフに数式を表示する」をチェックすればよい（図 (b)）。
- これらの操作の結果、グラフ中には近似曲線と数式が表示される（図 (c)）。

(注) 近似曲線があまり適切ではない場合もあることに注意。どんなデータを、どのように近似しているのかを把握する必要がある。

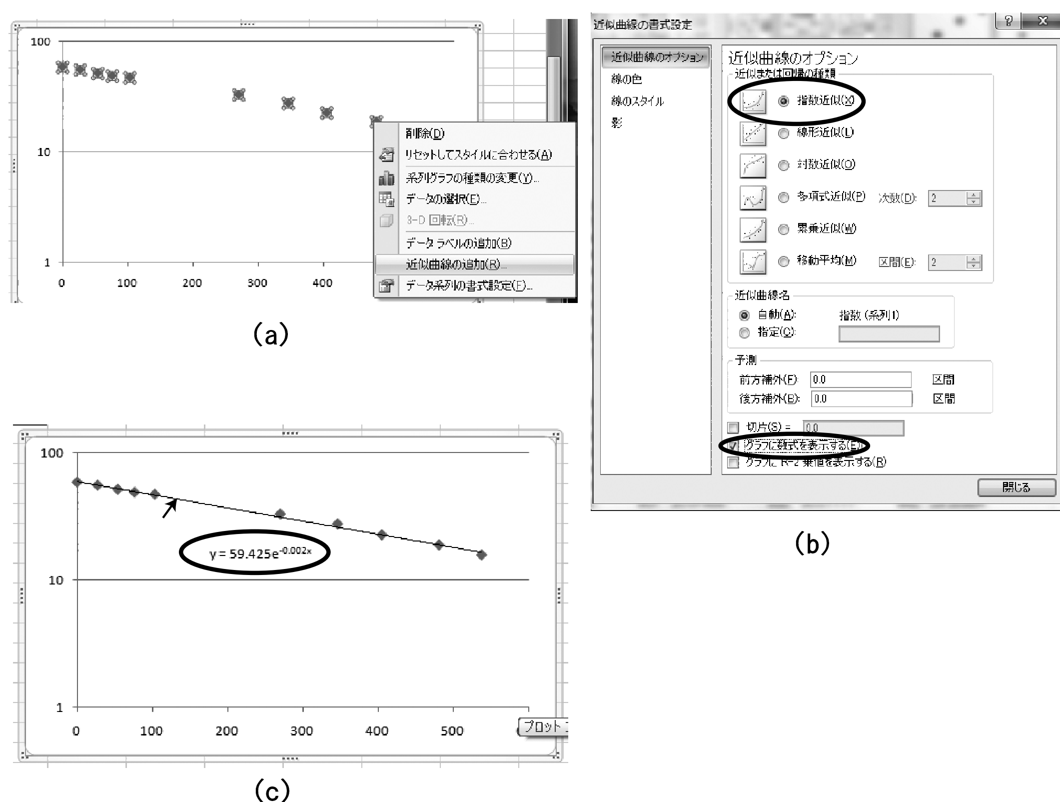


図 16: 近似曲線

III　基本的測定器

A　ノギス

　実習で用いるノギス (図 17) は、主尺の最小目盛りの $N-1$ 目盛りを n 等分した副尺がついたものである。ただし、$\frac{N}{n}=$ 整数 となるように N と n を選ぶ。この整数を $M=\frac{N}{n}$ とおく。主尺の最小目盛の長さを ε とすれば、副尺の 1 目盛の長さは $(N-1)\varepsilon/n$ となる。

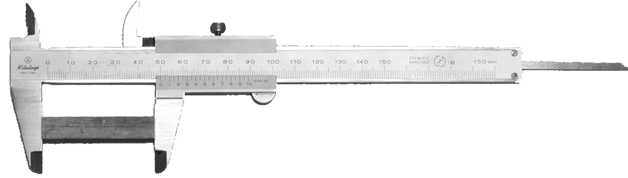


図 17: ノギス

　いま、あるものを測定したところ、副尺の k 番目の目盛りが主尺の目盛線と一致し、副尺の 0 目盛りが主尺の目盛の m と $m+1$ 番目の間にあったとする (図 19 をみよ)。副尺は図 19 の x 値を読み取るためのものである。いま、副尺の k 番目の目盛が主尺の目盛線と一致しているから、

$$k \times \frac{(N-1)}{n}\varepsilon + x\varepsilon = (\text{整数}) \times \varepsilon \qquad \text{ただし} \quad 0<k<n\,,\ 0<x<1 \tag{59}$$

を得る。したがって、

$$kM - \frac{k}{n} + x = \text{整数} \tag{60}$$

となる。ここで kM は整数であり、また $0<k/n<1$, $0<x<1$ だから、式 (60) が成り立つためには、$x=k/n$ でなくてはならない。実習に用いるノギスでは $N=40,\ n=10$ である。よって、副尺の読みに 0.1 mm を掛けた値を主尺の目盛の読みに加えればよい。

　実習で用いるノギスの他、精密天秤の目盛の読みなどはこれと同じ原理による。

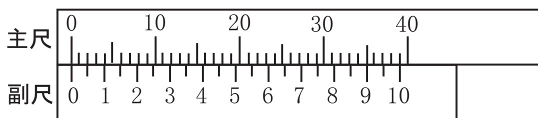


図 18: ノギスの目盛

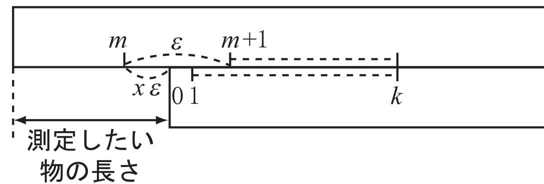


図 19: 副尺の読みとり

B　マイクロメーター

図 20 のようにマイクロメーターは、AB の間に試料をはさんで長さを測る。FGH の 1 回転で B は 0.5 mm 前後する。D と E は mm の尺度で、たがいに 0.5 mm ずらして目盛られているから、これで 0.5 mm まで読み取り、それより小さいところは F の目盛で読む。F は 1 周を 50 等分してあるので、1 目盛は 1/100 mm に対応する。H はラチェットといい、AB にかかる力が一定以上になると空転するようになっている。AB 間に

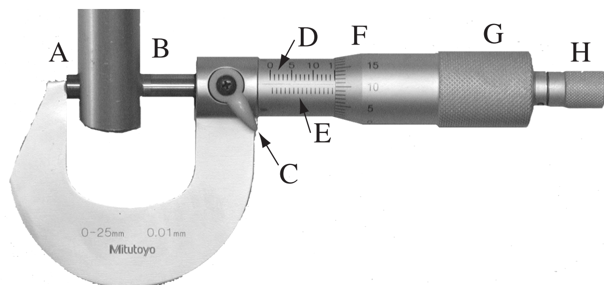


図 20: マイクロメーター

力がかかる方向に動かす場合は、必ず H をつまんで回さなくてはならない。C はクランプで、試料を AB にはさんでから、C で BF 部分の回転をとめ、試料をはずして目盛を読む場合に使う。C を下に下げると回転がとまるが、その状態で G を回転させることは絶対にしてはならない。そうするとマイクロメーターで最も大切なねじの部分を傷め、使いものにならなくなってしまう。G は内部のねじと直結していて、C がしまっていなければ、AB の間隔を広げる方向へ回転する時だけ使ってよい。学生実習では、C の操作はしないこと。

C　関数電卓

実習室にある取扱説明書を参考にして使用する。実習室に用意した CASIO fx-260 について、主な操作を以下に示す。

○ 統計計算

[MODE] [●] と操作して、統計計算モードにする。

FIX, SCI が表示されているときは [MODE] [9] と操作して NORM モードにする。

・ データ入力：n_1 [DATA]
・ 平均：[SHIFT] [$\bar{x}$]
・ データ数：[SHIFT] [n]
・ 統計用メモリーのクリア：[SHIFT] [SAC]
・ 平均二乗誤差 s：[SHIFT] [σ_{n-1}]
・ 平均値の平均二乗誤差 s_m：[SHIFT] [σ_{n-1}] [÷] n [SHIFT] [$\sqrt{\ }$][=]

○ 対数

・常用対数 [log]　　(例 1) $\log_{10} 1.23$：1.23 [log]
・自然対数 [ln]　　(例 2) $\log_e 90$：90 [ln]

○ 三角関数と逆三角関数

・ 単位を “度” に変換：[MODE] [4] (“DEG” と表示)
・ 単位を “ラジアン” に変換：[MODE] [5] (“RAD” と表示)

(例 1) $\sin\frac{\pi}{4}$ (RAD モード)：[SHIFT] [π] [÷] 4 [=] [sin]

(例 2) $\cos 63°52'$ (DEG モード)：63 [° ’ ”] 52 [° ’ ”] [cos]

(例 3) $\sin^{-1} 0.5$ (DEG,RAD モード)：0.5 [SHIFT] [$\sin^{-1}$]

(例 4) 60 度をラジアンに変換：[MODE] [4] 60 [SHIFT] [MODE] [5]

1　オシロスコープ

[目的]

心筋の活動電位を測定する心電計、大脳皮質の神経細胞の活動電位を測定する脳波計など、医療機器には電気現象の時間的変化を計測するものが多くある。本実験で扱う装置はオシロスコープとよばれ、電気現象の時間的変化を眼で見える形にして観察するために有効な装置である。オシロスコープは、エレクトロニクスのあらゆる分野で使われる大切な測定器である。

この実験では、オシロスコープの最も基本的な原理を理解し、同時にこの測定器を自由に使いこなせるようになることを目的とする。また基本的な交流回路と同軸ケーブルについての理解も深める。

[解説]

A　オシロスコープの原理

ブラウン管

ブラウン管は電子線を偏向させ、蛍光面上の輝点の軌跡を観測できるようにした電子管で、陰極線管（Cathode Ray Tube）とも呼ばれる。1897 年ドイツの K.F. Braun によって考案され、測定用やテレビジョン用など様々な用途がある。

オシロスコープに通常使用される静電偏向型のブラウン管は、高真空のガラス管球内に、円筒形または小穴をもつ円板形の電極 (陰極、格子、陽極) および偏向板が配置されている (図 1.1)。

ヒーターで陰極 (金属) を加熱すると、金属内の自由電子の運動エネルギーが増加し、金属表面から自由電子が飛び出す。この放出された電子を熱電子という。熱電子は、陰極と第 2 陽極との間の電位差 (数千から数万ボルト) によって加速され、蛍光面に衝突すると衝突した場所に輝点を生ずる。ヒーターから第 2 陽極までの部分を電子銃と云い、格子や陽極の電位を調節することにより、熱電子流の量を加減して輝点の明るさを調整できる。

電子線をはさんで垂直 (Vertical)、水平 (Horizontal) の 2 組の偏向板を置くと、偏向板に加える電圧によって電子線を上下左右に振らせることができる。したがって、ブラウン管面 (蛍光面) 上の輝点の動きによって偏向板に加えられた電圧の変化を知ることができる。

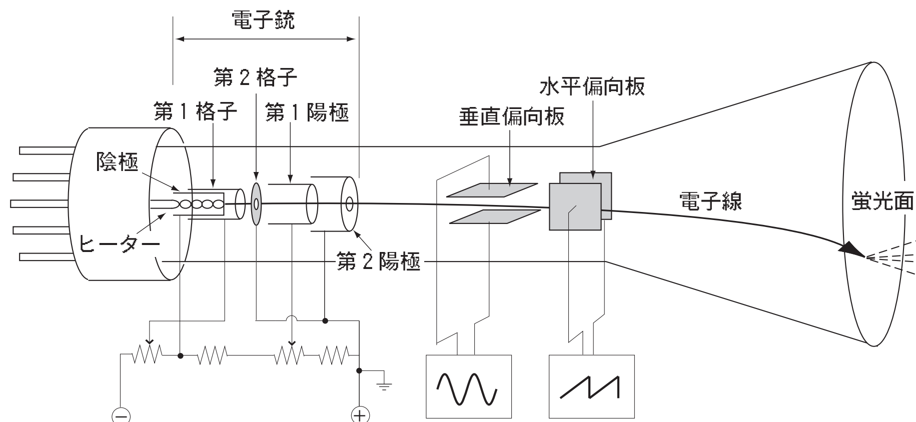


図 1.1: 静電偏向ブラウン管の構造

水平軸掃引

ブラウン管面における輝点の水平方向の振れは、水平偏向板にかかる電圧 $V_H(t)$ の時間変化によって制御されている (図 1.2)。

図 1.3(a) のように、水平偏向板に T_H を周期[†] とする鋸歯状電圧 $V_H(t)$ を加える。ここで、縦軸の電位 $V_H(t)$ は、水平偏向板の片方 (例えば管面に向って左側の金属板) を基準 (電位 0V) としたとき、もう片方の金属板 (右側の金属板) の電位の時間変化を示している。

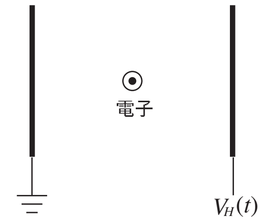


図 1.2: 水平偏向板

図 1.3 において、点 A の時刻では、左側の金属板の電位（アース）より右側の金属板の電位 $V_H(t)$ が低いから、負の電荷を持っている電子ビームは、左側に大きく曲げられ、管面の左端に輝点をつくる。（ここで、左右の向きはブラウン管を正面から見たときのものを意味している。）その後、時間が経つにつれて、右側の金属板の電位 $V_H(t)$ が高くなると、電子ビームが曲げられる度合は小さくなる。$V_H(t)$ が 0V となったとき (点 B の時刻)、電子ビームは水平偏向板により力を受けないので、真っ直ぐに進んで管面の中央に輝点をつくる。更に、右側の金属板の電位 $V_H(t)$ が高くなれば、電子ビームは右側に曲げられることになり、輝点は管面の右側 （C 方向) へと移っていく。輝点が管面右端の点 D にきたとき、右側の金属板の電位 $V_H(t)$ は再び低くなるから (A')、電子ビームは左側に曲げられることになり、輝点は左端 A' へと移る (図 1.3(b))。よって、輝点は管面の左端から右端へ A → B → C → D と動き、右端まできたら再び左端 A' に戻って、左端から右端へと動く軌跡を描く。蛍光の残光時間は数十ミリ秒程度であるので、輝点が管面の左端から右端まで動く時間がミリ秒からマイクロ秒程度の場合は、実際にはこれらの輝点の動きが重なった水平な輝線が管面で観測される (図 1.3(c))。

鋸歯状電圧 $V_H(t)$ は各周期において時間に対して直線的に変化するので (図 1.3(a))、輝点は一様の動き (一定位置から一定速度で一定距離だけ右方に動く) を繰り返す。これを掃引 (sweep) と呼び、鋸歯状電圧 $V_H(t)$ を掃引波と云う。また、T_H を掃引時間 (sweep time)、T_H の逆数を掃引周波数 (sweep frequency) と云う。掃引波はオシロスコープ内部の電気回路で発生するのであり、外部から入力するのではない。T_H はオシロスコープのつまみ **TIME/DIV**[‡] で設定することができる。

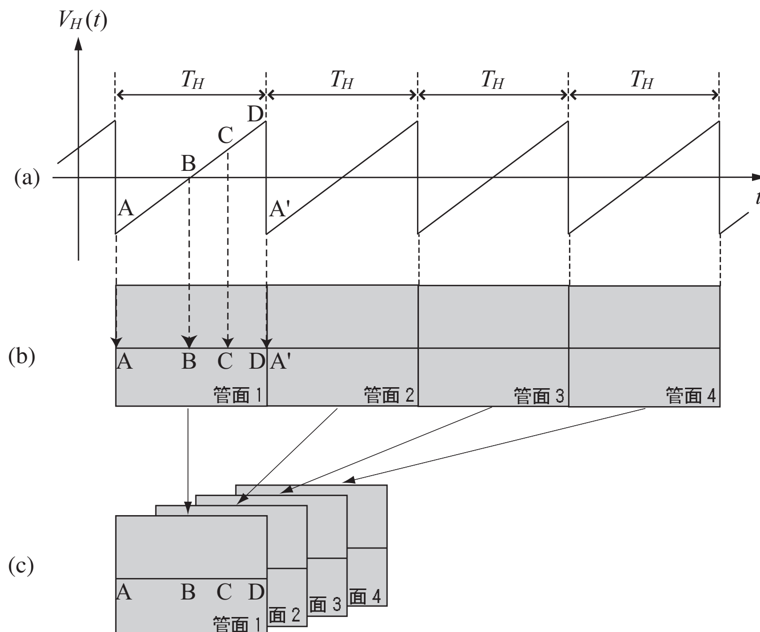


図 1.3: 水平軸掃引のための鋸歯状波とそれによる輝線

[†]振動において、あるパターンが繰り返される最小の時間を周期という。周期関数の代表的なものは、正弦波や余弦波である。例えば、周期 T の正弦波は $V(t) = V_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ と表される。

[‡]以下、太文字はオシロスコープのつまみを示す。

垂直軸入力信号電圧

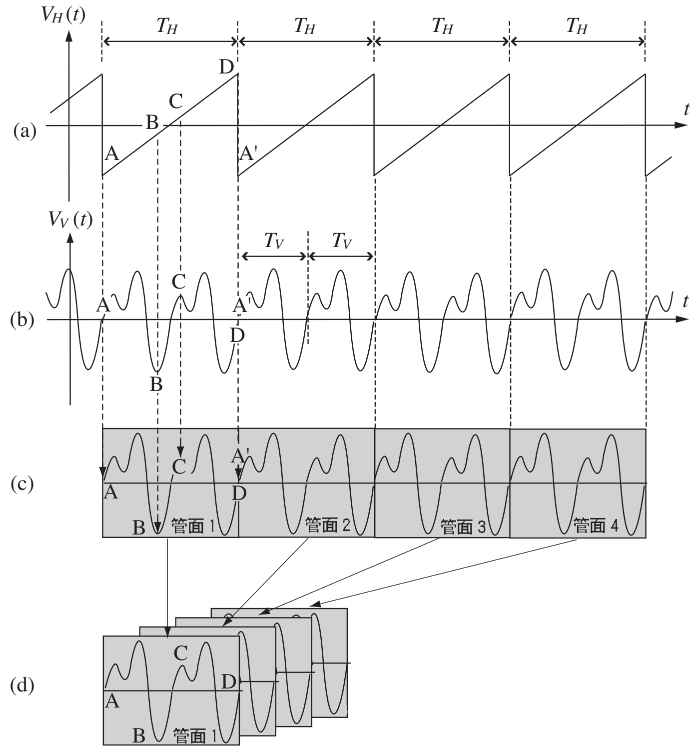


図 1.4: 垂直軸入力信号電圧波形

観測したい信号電圧 $V_V(t)$ の波形が、T_V を周期とする図 1.4(b) に示されるような波形であるとする。

水平偏向板に 鋸歯状電圧 $V_H(t)$ を加えると同時に、垂直偏向板に 信号電圧 $V_V(t)$ を加えると、輝点は水平方向の掃引と共に垂直方向に $V_V(t)$ に比例して振れる。例えば、掃引周期 T_H が 信号電圧周期 T_V の 2 倍であり、掃引開始の時刻 (A) に $V_V(t)$ の位相[†] が図 1.4(b) のような状態であったとしよう。輝点は、掃引により管面の左端から右端へと水平方向に動くと同時に、垂直偏向板にかけられた信号電圧 $V_V(t)$ により垂直方向にも動くので、A → B → C → D のように 1 回の掃引に対して垂直方向に 2 周期移動する (図 1.4(c))。T_H が T_V のちょうど 2 倍であることから、次の掃引開始時刻 (A') における $V_V(t)$ の位相は、この最初の掃引開始時刻 (A) における位相と同じである。よって、輝点は掃引のたびに同じ軌跡を描くので、ブラウン管面には $V_V(t)$ の波形のうち 2 周期分だけが静止した波形として観察されることになる (図 1.4(d))。一般に、掃引時間 T_H を信号電圧周期 T_V の n 倍（ n は整数）に合わせると n 個の信号電圧波形 (信号波) が静止して観察される。n が整数でない場合には、掃引の各周期毎に信号波の位相が異なるので、ブラウン管面上の波形が動いて見えることになる。特別な場合として、掃引時間 T_H と信号電圧周期 T_V の間に $T_H = n\,T_V$ のような整数比の関係があると、波形はブラウン管面上で静止する。このために、信号電圧 $V_V(t)$ の n 周期目の一定位相毎に掃引を開始するように 鋸歯状電圧 $V_H(t)$ が自動的に修正されるような仕組みが必要である。そのための操作が同期調整である。

[†]周期 T の信号電圧 $V(t) = V_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha)$ の場合、三角関数の角度にあたる部分 $\frac{2\pi}{T}t + \alpha$ を位相という。

トリガー掃引回路

オシロスコープの管面に描かれる波形は、水平方向の位置を決める掃引波と、垂直方向の位置を決める信号波から作られる。掃引波はオシロスコープ内部で作られており、信号波はプローブを通して外部から入力される。したがって、この２つの電気信号は本来無関係で、波形が管面に静止して見えるための条件 $T_H : T_V = n : 1$ は、特殊な場合を除いては成立していない。つまり、管面には静止した波形は描かれないことになる。これでは、電気信号の測定をすることはできない。どのような信号波が外部から入力されても静止した波形を得ることができるような工夫が必要である。この工夫は「同期調整」と呼ばれる。ここでは同期調整として広く用いられているトリガー掃引方式を説明する。

(1) 右図に示したように、外部から入力された信号波は２つに分けられ、１つはブラウン管の垂直偏向板へ、他方は「トリガー回路」へと接続される。

(2) トリガー回路には「レベル電圧」と呼ばれる一定の電圧が与えられている。この「レベル電圧」は、オシロスコープのつまみ **LEVEL** で変えることができる。

(3) トリガー回路で信号波とレベル電圧が比較される。図 1.6(a) において、sin の関数が信号波、水平の実線がレベル電圧を表している。

(4) トリガー回路は信号波とレベル電圧が一致した時刻を検知して、トリガーパルスと呼ばれる電気信号を発生させる（図 1.6(b) ）。

(5) ただし、図 1.6(a) で分かるように、信号波とレベル電圧は２種類のタイミングで一致する。これらは、信号波が増加している場合と、信号波が減少している場合とに分類することができる。オシロスコープには “**SLOPE**” というレバーやボタンが用意されていて、どちらのタイミングを選択するかを決めることができる。図 1.6 は “**SLOPE**” を “＋”（信号波が増加）にした場合のものである。

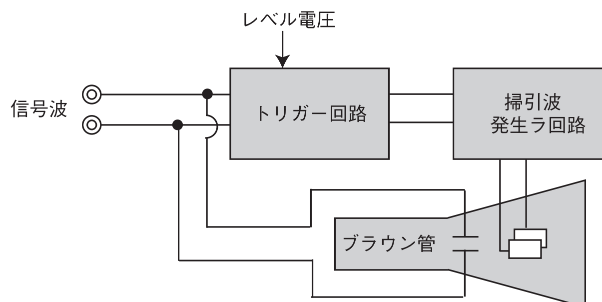


図 1.5: トリガー掃引回路

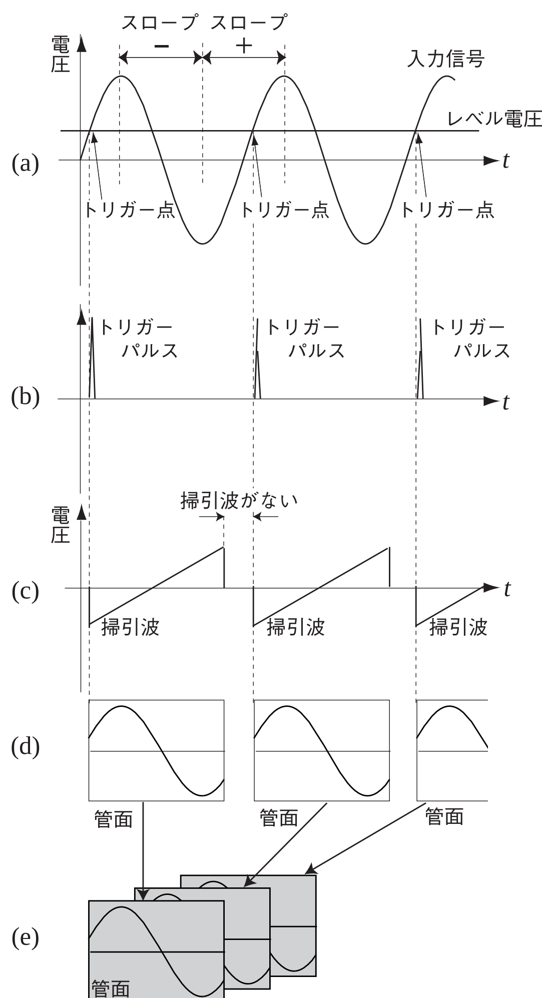


図 1.6: 入力信号と管面に現れる波形（１）

(6) トリガー回路で作られたトリガーパルスは、掃引波発生回路に入力される。掃引波発生回路はトリガーパルスを受けとると一度だけ掃引波を発生する。掃引波を出したあと掃引波発生回路は休止状態となり、次のトリガーパルスが入力されるまで動作しない。

(7) 掃引波の長さは、オシロスコープのつまみ **TIME/DIV** で設定され、決められた時間となっている。したがって、ひとつの掃引波が終った後、次のトリガーパルスが発生するまでの時間は掃引波がない状態となる。この間、管面には何の波形も描かれない。

(8) 以上の方法を用いると、掃引波と信号波のタイミングを一致させることができる。図 1.6(d) と (e) のように、管面には同じ波形を何度も描くことになるので、静止波形を得ることができる。

(9) 図 1.7 のように、次のトリガーパルスが発生しても掃引波が終了していないことがある。このような場合、掃引波発生中のトリガーパルスは無視される。

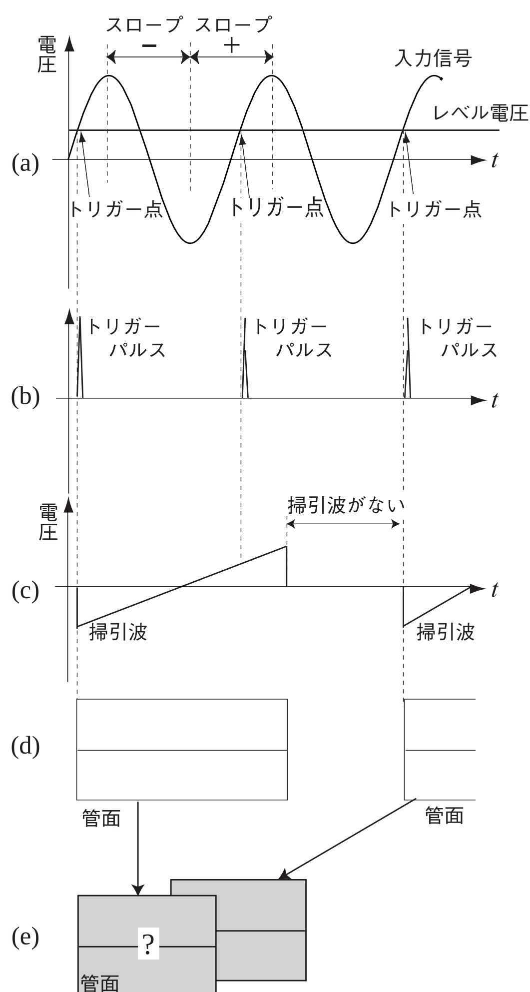


図 1.7: 入力信号と管面に現れる波形（２）

B　回路素子

電気抵抗

物質に電圧 V [V] をかけたとき、流れる電流 I [A] はオームの法則によって

$$I = \frac{V}{R} \tag{1.1}$$

と表され、この R をその物質の電気抵抗、または単に抵抗と呼ぶ。電気抵抗の単位は [Ω (オーム)] であり、これは [V/A] に等しい。V または I が大きすぎないとき、直流、交流にかかわらず電気抵抗は一定である。超伝導体と呼ばれる非常に特殊な物質を除き、ほとんど全ての物質は電気抵抗を持つが、通常、導線の電気抵抗は 0 Ω と見なしてよい。

コンデンサー

向かい合った電極の間に絶縁体を挟んだ物をコンデンサーという。コンデンサーには電荷を蓄える働きがあり、電圧 V [V] をかけたときに蓄えられる電荷 Q [C] は

$$Q = CV \tag{1.2}$$

と表される。この C をコンデンサーの電気容量と呼び、これが大きいほど、同じ電圧をかけたときに蓄えられる電荷の量が多いことになる。電気容量の単位は [F (ファラド)] であり、これは [C/V] に等しい。最も単純な形状をした平行板コンデンサーで電荷がため込まれる様子を図 1.8 に示す。

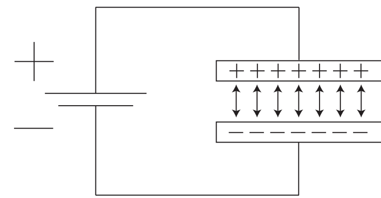


図 1.8: コンデンサー

電池の＋極に接続されている金属板には正電荷が、−極に接続されている金属板には負電荷が集まり、正電荷と負電荷の間に働く引力によってこれらの電荷は蓄えられている。電荷に働く引力は距離が近いほど大きくなるので、金属板の距離 d [m] が小さいほど電荷は蓄えられやすい。また、金属板の面積 S [m^2] が大きければ電荷はたくさんため込まれる。このため、コンデンサーの電気容量は S に比例し、d に反比例すると考えられる。実際、平行板コンデンサーの電気容量は S と d を使って

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \tag{1.3}$$

と表される。ここで、ε_0 は真空の誘電率、ε_r は極板間に挟んだ物質の比誘電率である。コンデンサーを電圧 V の電池に接続すると、電荷が移動し、極板間の電圧が大きくなる。極板間の電圧が電池の電圧 V と一致したとき、電荷の移動は停止する。このとき、コンデンサーには式（1.2）の電荷 $Q = CV$ が蓄えらている。

コンデンサーに交流電圧 $V(t)$ をかけると、電圧が時間変化するので蓄えられる電荷の量 $Q(t)$ も時間変化する。電荷の時間変化は電流を表すので、コンデンサーを流れる電流 $I(t)$ は

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV(t)}{dt} \tag{1.4}$$

と表される。

コイル

導線をらせん状に巻いたものをコイルという。コイルに電流を流すと、磁石としての性質を持つことはよく知られている。コイルに限らず、導線に電流を流すと、図 1.9 のように磁場が生じる。磁場の方向は、図 1.10 に示すように右ネジの法則によって示される。これをコイルにすると、一巻き一巻きのコイルが作る磁場が足し合わされるので、図 1.11 に示すように非常に大きな磁場を作ることができる。これが電磁石である。

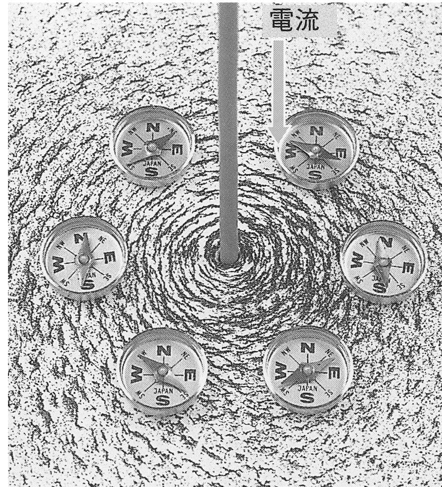


図 1.9: 電流と磁場

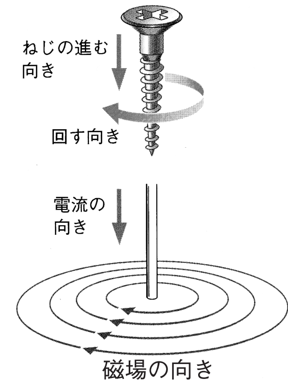


図 1.10: 電流の向きと磁場の向き

さて、コイルに電流を流すと磁場が生じるなら、コイルの中に磁石を置くと電流が流れるのではないだろうか。実は、コイルの中に磁石を置いただけでは電流は流れない。しかし、図 1.12 にようにコイルに磁石を近づけたり、遠ざけたりすると、その時だけ電流が流れる。その電流の向きについて調べたのが図 1.13 である。コイルに磁石の N 極を近づけると、磁石の方から見て反時計回りに電流が流れる。もしこのコイルに、この向きに電流を流すと、コイルの、磁石に近い方が N 極になるような電磁石になる。磁石の N 極と N 極は退け合うので、磁石を近づけにくくなる。つまり、コイルに磁石を近づけようとすると、コイルは磁石の接近を妨げるような電磁石になるための電流を流すことになる。これを電磁誘導という。ところで、コイルに電流を流すと電磁石になるのだったが、スイッチを入れ、コイルが電磁石になると言うことは、その瞬間にコイルのそばに磁石が発生したことになり、電磁誘導が起こるのではないか。実際、コイルに流れる電流が時間変化すると、それによってできる電磁石の作る磁場も時間変化し、その変化を妨げようとするような

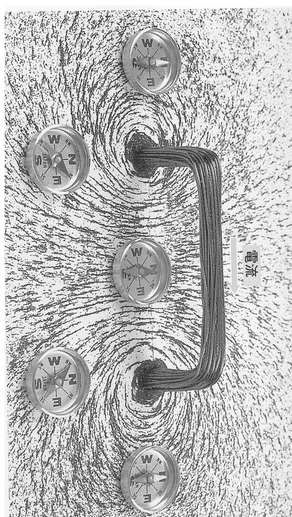


図 1.11: コイルの作る磁場

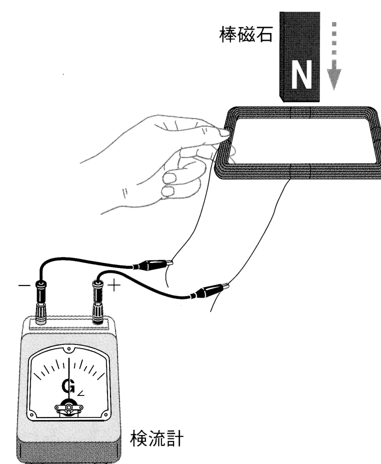


図 1.12: 磁石と電流

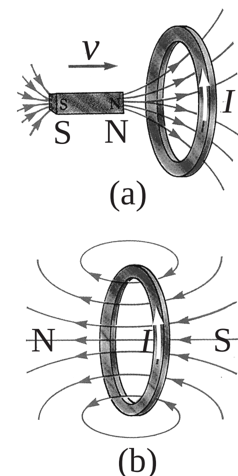


図 1.13: 磁石の動く向きと電流

電流がコイルに流れようとする。その、磁場の変化を妨げようとする電流を流すための電圧はコイルに流した電流の時間変化に比例し、

$$V(t) = -L\frac{dI(t)}{dt} \tag{1.5}$$

と表される。この比例定数 L をインダクタンスと呼ぶ。インダクタンスの単位は [H (ヘンリー)] であり、これは [V·s/A] に等しい。右辺の負号は、元の電流に対し、この電圧によって磁場の変化を妨げようとする逆向きの電流が流れることを意味している。

C　交流回路

直流と交流

時間的に一定の定常電流を表す直流に対して、時間と共に周期的に変化する電流を交流という。交流の波形としては、正弦波、鋸歯状波、矩形波などがある。

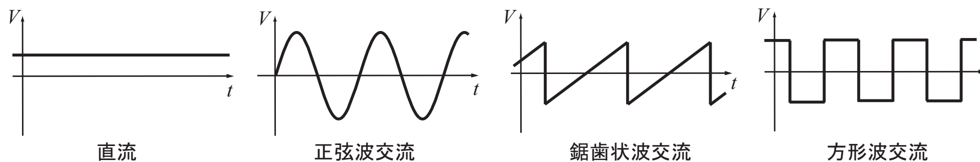


図 1.14: 直流と交流波形の例

交流回路の抵抗

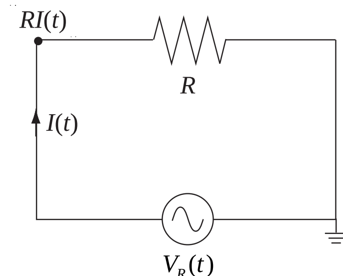


図 1.15: 交流回路の抵抗

図 1.15 のように抵抗のみを含む回路を考える。電流 $I(t)$ を

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi f t) \tag{1.6}$$

とする。ここで f は周波数[†]である。抵抗にかかる電圧は、オームの法則より

$$V_R(t) = R\, I(t) = RI_0 \sin(2\pi f t) \tag{1.7}$$

である。よって、抵抗での電流と電圧は同位相（sin の中の角度が同じ）である。また、式 (1.7) より、電圧の最大値は

$$V_0 = R\, I_0 \tag{1.8}$$

となる。

電流や電圧などの正弦変化する量は、原点のまわりに反時計回りに回転するベクトルで表すことができる。ベクトルの長さが、その量の最大値を示し、縦軸上へのベクトルの射影の長さが、その量の瞬時値を表す。ベクトルを用いると、大きさと位相を同時に取り扱うことができるため、交流回路での電圧や電流の関係を考える際に便利である。図 1.16 に、電流 (式 (1.6)) と抵抗にかかる電圧 (式 (1.7)) の関係をベクトルで表した図を示す。それぞれのベクトルの長さは、電流の最大値 I_0 と電圧の最大値 V_0 である。

[†]単位時間 (1 秒間) の振動の回数 (同じパターンの数) を周波数という。単位は Hz(ヘルツ) または s^{-1} である。周波数 f と周期 T は $f = \frac{1}{T}$ の関係にある。

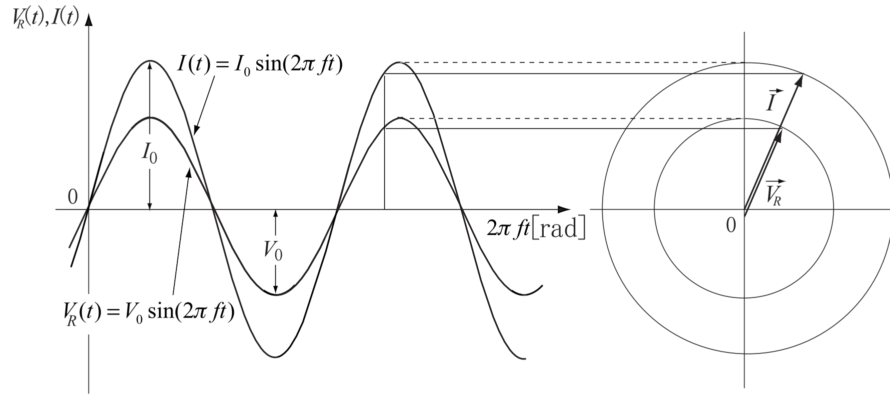


図 1.16: 交流電圧に接続された抵抗における電圧と電流

交流回路のコンデンサー

直流回路ではコンデンサーに電荷が蓄えられると、それ以上電流は流れない。しかし、交流回路の場合は電圧および電流が時間とともに変化するので、コンデンサーに蓄えられる電荷量、極板間電圧も時間変化をする。したがって、コンデンサーを通して交流電流が流れると考えることができる。

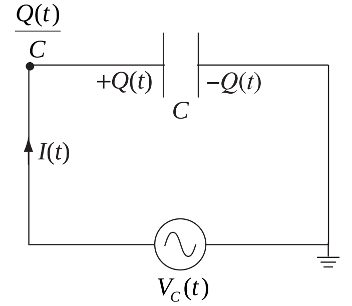


図 1.17: 交流回路のコンデンサー

図 1.17 のようにコンデンサーのみを含む回路を考える。電流 $I(t)$ を

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft) \tag{1.9}$$

とする。ここで f は周波数である。式 (1.4) より電圧 $V_C(t)$ と電流 $I(t)$ の間には

$$V_C(t) - V_C(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV_C(t)}{dt} dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} I(t)\, dt = -\frac{I_0}{2\pi fC} \cos(2\pi ft) + \frac{I_0}{2\pi fC} \cos(2\pi ft_0) \tag{1.10}$$

の関係が成立する。ここで、t と t_0 はどのような値をとってもよいので、式 (1.10) は恒等式として成立する必要がある。したがって、直流成分がないときは、

$$V_C(t) = -\frac{I_0}{2\pi fC} \cos(2\pi ft) \tag{1.11}$$

となる。このことから、電圧 $V_C(t)$ の位相は電流 $I(t)$ の位相より $\frac{\pi}{2}$ (90°) 遅れていることがわかる。式 (1.11) より、電圧の最大値は $V_0 = \frac{I_0}{2\pi fC}$ となる。$\frac{1}{2\pi fC}$ はコンデンサーのリアクタンスとよばれ、抵抗と同じ単位を持つ。図 1.18 に、電流 (式 (1.9)) とコンデンサーにかかる電圧 (式 (1.11)) の関係をベクトルで表した図を示す。ベクトルの長さは電流と電圧の最大値を表している。

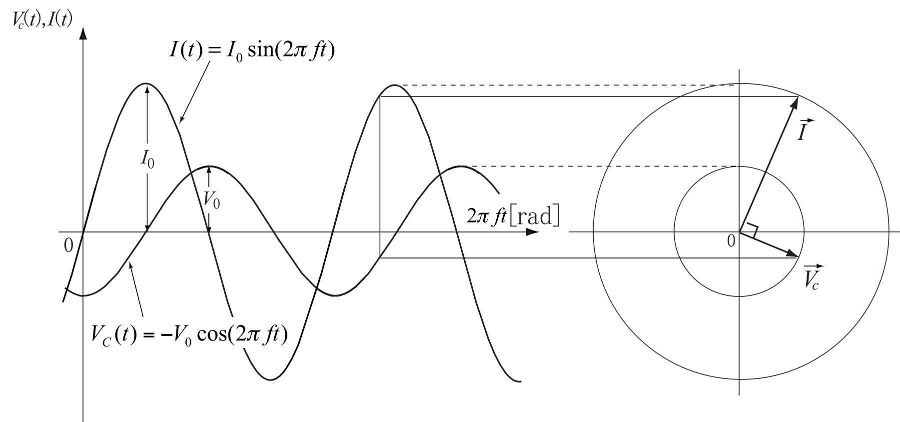


図 1.18: 交流電圧に接続されたコンデンサーにおける電圧と電流

交流回路のコイル

図 1.20 のようにコイルのみを含む回路を考える。電流 $I(t)$ を

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi f t) \tag{1.12}$$

とする。ここで f は周波数である。いま、電流が図 1.21(a) のように、矢印の向きに増加している瞬間について考えてみる。このとき、式 (1.5) で説明したように、インダクタンスが L のコイルには、電磁誘導によって電流の増加を妨げる向きに

$$L\frac{dI(t)}{dt} \tag{1.13}$$

という大きさの電圧が発生する。この様子を電池の記号を用いて表すと図 1.21(a) のようになる。その他の場合を考えてみても（図 1.21(b)~(d)）コイルに発生する電圧の向きは、符号を含めた式 (1.13) によって表すことができる。したがって、電圧 $V_L(t)$ には

$$V_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = 2\pi f L I_0 \cos(2\pi f t) \tag{1.14}$$

の関係が成立することになる。このことから、電圧 $V_L(t)$ の位相は電流 $I(t)$ の位相より $\frac{\pi}{2}$ (90°) 進んでいることがわかる。 式 (1.14) より、電圧の最大値は

$$V_0 = 2\pi f L\, I_0 \tag{1.15}$$

となる。$2\pi f L$ はコイルのリアクタンスとよばれ、抵抗と同じ単位を持つ。図 1.19 に、電流 (式 (1.12)) とコイルにかかる電圧 (式 (1.14)) の関係をベクトルで表した図を示す。ベクトルの長さは電流と電圧の最大値を表している。

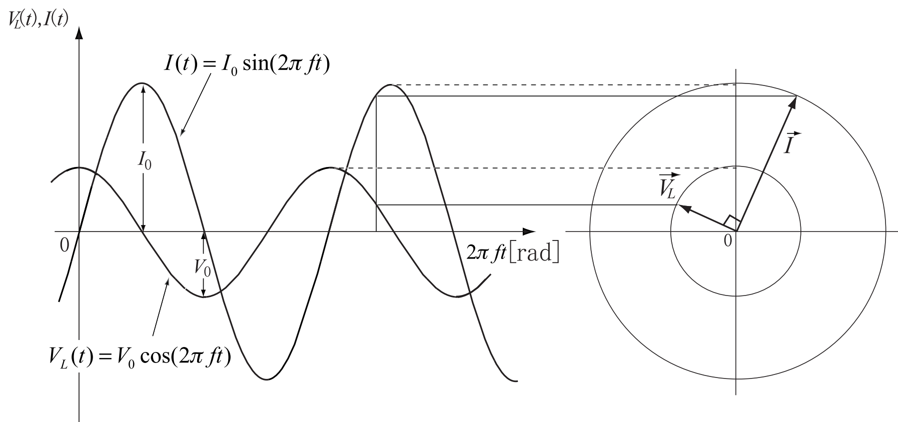


図 1.19: 交流電圧に接続されたコイルにおける電圧と電流

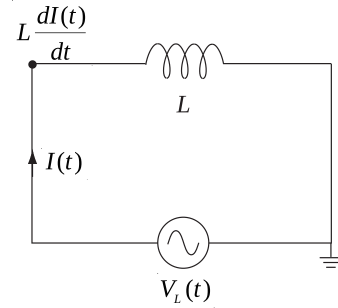
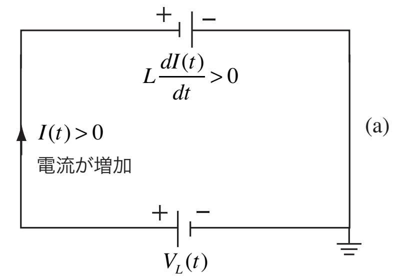
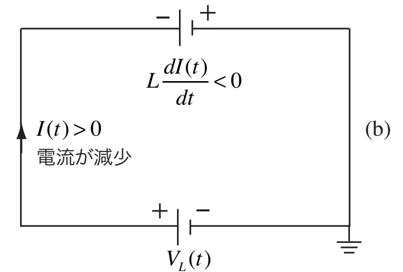
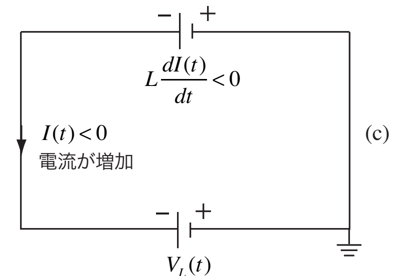


図 1.20: 交流回路のコイル







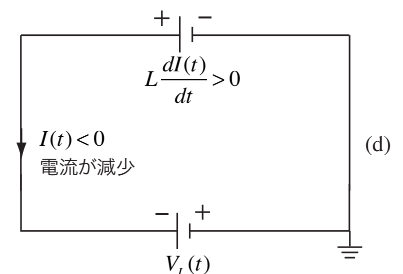


図 1.21: コイルの自己誘導

直列 RC 回路

コンデンサーと抵抗を交流電源に直列に接続した回路について考える (図 1.22 参照)。回路に流れる電流 $I(t)$ は各素子で共通である。$I(t)$, $V_R(t)$, $V_C(t)$ の関係をベクトルを用いて表すと、図 1.23 のようになる。

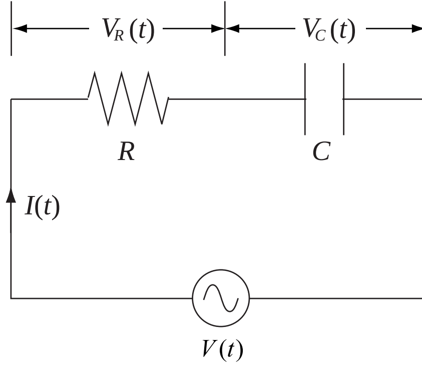


図 1.22: 直列 RC 回路

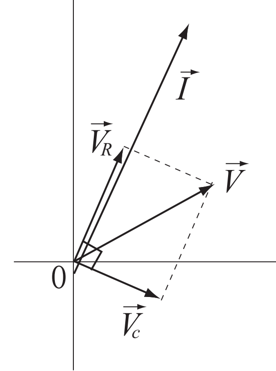


図 1.23: 各素子にかかる電圧と電流の関係

$V_R(t)$ の最大値は $V_0^R = RI_0$ で、$V_C(t)$ の最大値は $V_0^C = I_0/2\pi fC$ である。これらの電圧の足し算は、図 1.23 に示したようにベクトルの合成として扱うことができる。したがって、$V(t)$ の最大値は $V_0 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}\, I_0$ となる。このことから、

$$\frac{V_0^R}{V_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} \quad , \qquad \frac{V_0^C}{V_0} = \frac{\frac{1}{2\pi fC}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} \tag{1.16}$$

という関係を得ることができる。

直列 RL 回路

コイルと抵抗を交流電源に直列に接続した回路について考える (図 1.24 参照)。回路に流れる電流 $I(t)$ は各素子で共通である。$I(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$ の関係をベクトルを用いて表すと、図 1.25 のようになる。

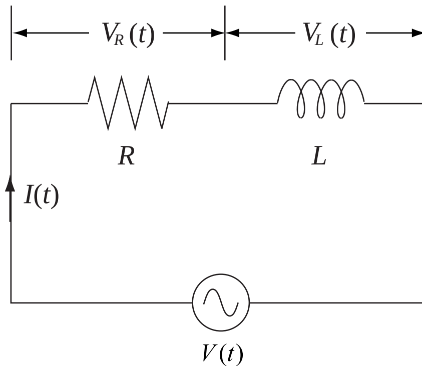


図 1.24: 直列 RL 回路

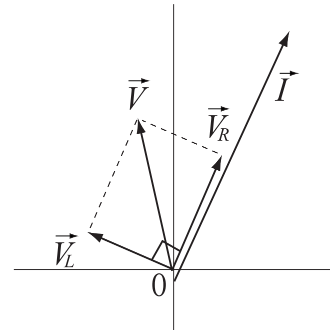


図 1.25: 各素子にかかる電圧と電流の関係

$V_L(t)$ の最大値は $V_0^L = 2\pi fLI_0$ である。RC 回路の場合と同様に考えると、$V(t)$ の最大値は $V_0 = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}\, I_0$ となる。したがって、

$$\frac{V_0^R}{V_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}} \quad , \quad \frac{V_0^L}{V_0} = \frac{2\pi fL}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}} \tag{1.17}$$

の関係を得ることができる。

同軸ケーブル

図 1.26(c) に示したように、同軸ケーブルは芯線と外部導体からなる２本の電線である。ただし、外部導体は金属の網で作られていて、芯線を取り囲んでいる。外部導体は電磁シールド の役割をもっており、日常の環境に存在する電磁気的な雑音（数ボルトにおよぶことがある）を遮断して、芯線に影響が及ばないようにすることができる。その結果、微弱な電気信号を芯線を通して伝えることができる。また、同軸ケーブルは、長い距離を電気信号の形を変えずに伝えることができる特徴を持っている。

同軸ケーブルは、我々の日常生活においても広く使われている。テレビの受像機はアンテナと同軸ケーブルによって接続されている。アンテナで受信したテレビの信号は大変微弱なので、電磁シールド によって保護しながら受像機へと運ぶ必要がある。せっかく、雑音に打ち勝って運んだとしても、信号の様子が変わってしまっては役に立たない。このためにも同軸ケーブルは大変有用なのである。

情報伝達を行なう通信においても同軸ケーブルは多用されている。今日、コンピューター・ネットワークは当たり前のものとなっている。極めて短い時間間隔で、１や０に相当する電気信号を大量に、しかも、間違えなく伝達する必要がある。同軸ケーブルの性質はこの情報通信において必要不可欠なものである。

さて、図 1.26(a) のように、同軸ケーブルに電流あるいは電圧の変化（信号）を与えると、その信号は同軸ケーブル内を一定の速度で進んでいく。通常、同軸ケーブルの外部導体はアース（電位ゼロ）に接続して使用する。いま、正の電位の信号が芯線に入力されると、芯線の表面には正の電荷が発生し、これに対応する外部導体の部分には負の電荷が現れる（図 1.26(b)）。このため、芯線と外部導体の間に電場が発生する。芯線に生じた電荷が一定の速度で伝搬すると、芯線に電流が流れていることになる。したがって、この芯線を流れる電流を取り囲むように磁場が発生する（図 1.26(d)）。このような、電荷、電場および磁場の集団が同軸ケーブルを伝搬していくのである。

同軸ケーブルの芯線と外部導体の間には誘電体（塩化ビニール）が挟まれており、コンデンサーとしての性質を持つ。また、芯線に電流が流れることでそのまわりには磁場が発生する。このため、同軸ケーブルはコイルの性質もあわせ持つことになる。このような同軸ケーブルのコンデンサーとコイルの性質は、通常の電気回路の素子のように個別ではなく、ケーブル全体に広がり分布している。このため、同軸ケーブルは分布定数回路と呼ばれることがある。

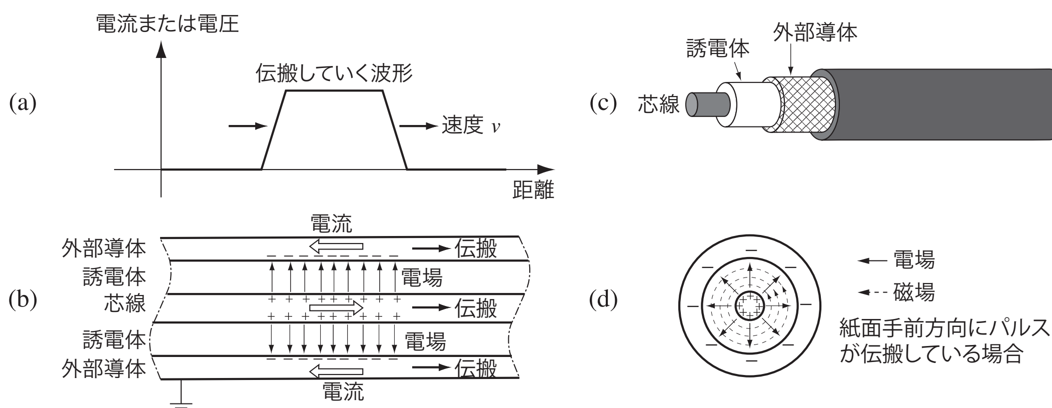


図 1.26: 同軸ケーブルの構造と信号伝搬

同軸ケーブル内の信号伝搬

同軸ケーブルを長さ Δx に細かく分割してみると、各部分はコイルとコンデンサーからなる回路と考えることができる。図 1.27(a) に示したように、ケーブル全体はコイルとコンデンサーの回路が梯子のように繰り返されたものに対応する。ここで、コイルのインダクタンス L [H/m] とコンデンサーの電気容量 C [F/m] は、単位長さの同軸ケーブルについての量を表している。このような繰り返し回路に電気パルスが入力されると、回路のいくつかに電流が流れる。

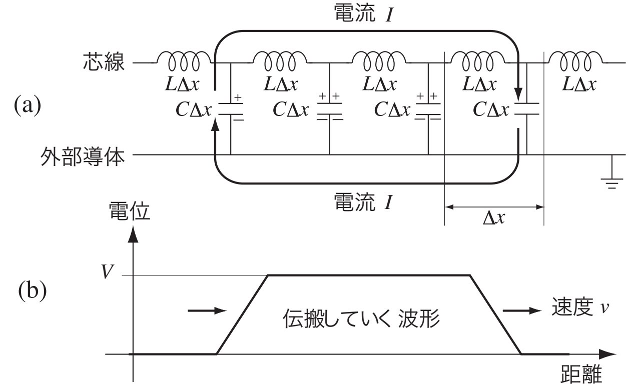


図 1.27: 梯子型回路と信号伝搬

左から右へ向かって伝わっている大きさ V ボルトのパルスを考える。ある時刻 t にパルスの右端が回路のある部分に突入したとする（図 1.28(a)）。このとき、この回路中のコンデンサーには、まだ、電荷が蓄えられていない。一方、パルスは一つ左手前の回路を通過しているので、手前のコンデンサーは充電が終了している。したがって、回路の点 A の電位は V ボルトで、点 B の電位はゼロとなっている。その後、電流がコンデンサーに流れ込み、点 B の電位は上昇していく。最終的に、点 B の電位がパルスの大きさと同じ V ボルトとなったときにコンデンサーへの充電が終了する（図 1.28(b)）。この間に経過した時間を Δt とする。

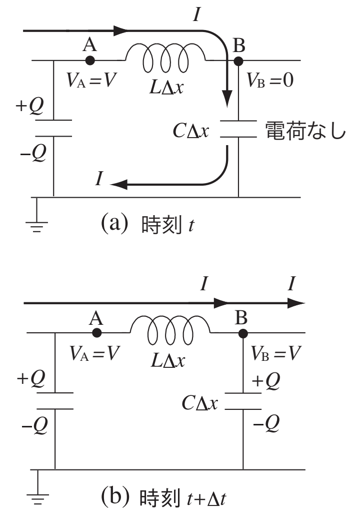


図 1.28: 信号の先端の伝搬

コイルに流れる電流について考えると、時間 Δt で電流が I だけ変化したことになる。したがって、

$$V_A - L\Delta x \frac{I}{\Delta t} = V_B$$

が成立する。時刻 t においては、$V_A = V$ で $V_B = 0$ なので、

$$I = \frac{V}{L}\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{1.18}$$

となる。このようにコイルを通過した電流はコンデンサーに流れ込み、電荷 Q が蓄積される。コンデンサー両端の電位差が V となったとき、コンデンサーへの電流の流入は停止する。したがって、

$$Q = (C\Delta x)V \tag{1.19}$$

が成立する。また、電流 I が時間 Δt 流れた結果、電荷 Q が生じたので、

$$Q = I\Delta t \tag{1.20}$$

が成立する。したがって、式 (1.18), (1.19), (1.20) から

$$V = \frac{I}{C}\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{V}{CL}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \tag{1.21}$$

の関係を得ることができる。式 (1.21) の両辺から V を消去して、変形すると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.22}$$

となる。ここで、Δx は時間 Δt の間に電気パルスの先頭が進んだ距離なので、$\Delta x/\Delta t$ は電気パルスが進む速度を表している。

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.23}$$

同軸ケーブルの電気的特性を表す単位長さあたりの電気容量 C [F/m] とインダクタンス L [H/m] は、電磁気学にしたがって計算することができる。芯線の半径を a で、外部導体の内径を b とすると、単位長さあたりの電気容量は

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\log_e b/a} \tag{1.24}$$

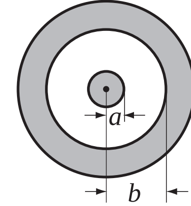


図 1.29: 同軸ケーブルの断面

で、単位長さあたりのインダクタンスは

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\log_e b/a \tag{1.25}$$

となる。ここで、定数 ε [C/V·m] と μ [V·s/A·m] は、同軸ケーブルに使われている誘電体の誘電率と透磁率である。この結果を用いると、同軸ケーブルを伝わるパルスの速度は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{1.26}$$

と表すことができる。誘電率や透磁率の値は誘電体に用いる物質の種類によって異なる値をとるが、真空中でも決まった値を持つ。試みに、最も簡単な場合である真空の場合を考えてみると、誘電率と透磁率は

$$\varepsilon_0 = 8.854187\cdots \times 10^{-12}\ [\mathrm{C/V{\cdot}m}]\ , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ [\mathrm{V{\cdot}s/A{\cdot}m}] \tag{1.27}$$

という値であることが調べられている。これらの数値をパルスの速度の式 (1.26)) に代入してみると

$$v = \frac{1}{\sqrt{8.854187 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 2.997925 \times 10^{8}\ [\mathrm{m/s}] \tag{1.28}$$

となる。ところで、光の速度は秒速 30 万 km （正確には 299792458 m/s) である。この速度は上の結果とぴったり一致している。これは、決して偶然ではない。諸君は光は電磁波（電波ともいう）の一種であることを知っているだろうか。

電磁波は時間変動する電場と磁場が絡み合いながら進む波である。テレビやラジオの信号を伝えているものは一般に電波と呼ばれているが、これも電磁波の一種である。そのほか、赤外線、紫外線、X 線、γ 線なども電磁波である。電磁波の伝搬の様子を図 1.30 に示す。このことを知ったうえで同軸ケーブルを伝わるパルスの速度を表す式 (1.26) を見てみると、電気の性質を表す定数 ε と磁気の性質を表す定数 μ の両者を含んでいることに気付く。まさに電磁波たる所以である。したがって、同軸ケーブルでのパルス伝搬という現象も、電磁波が金属導体に電荷を発生させながら突き進んでいくという現象なのである。

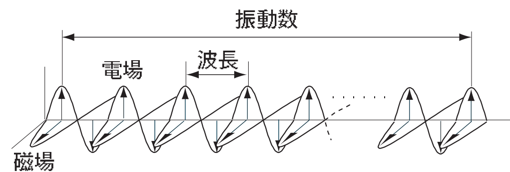


図 1.30: 電磁波

同軸ケーブルでの信号の反射

同軸ケーブルにおけるパルス伝搬については、図 1.27 (41 ページ) のようにコイルとコンデンサーの組み合わせを考えることが便利である。一方、信号の反射については、同軸ケーブル全体を 1 つの電気抵抗と見なすことが便利である。同軸ケーブルを伝搬する電気信号の電圧 V と電流 I の間には式 (1.18) の関係があり、$\Delta x/\Delta t$ は式 (1.22) のように書けるので、同軸ケーブル全体の電気抵抗 Z は

$$Z = \frac{V}{I} = L\frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

と表すことができる。この結果に、同軸ケーブルの電気容量とインダクタンスの式 (1.24) と式 (1.25) を代入すると

$$Z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\log_e \frac{b}{a}$$

となる。この結果を見ると、同軸ケーブルの太さ a, b と誘電体の種類 ε, μ を調整すれば、同軸ケーブル全体の電気抵抗 Z を適切な値にすることができることが分かる。測定で用いる同軸ケーブルの電気抵抗は 50Ω である。

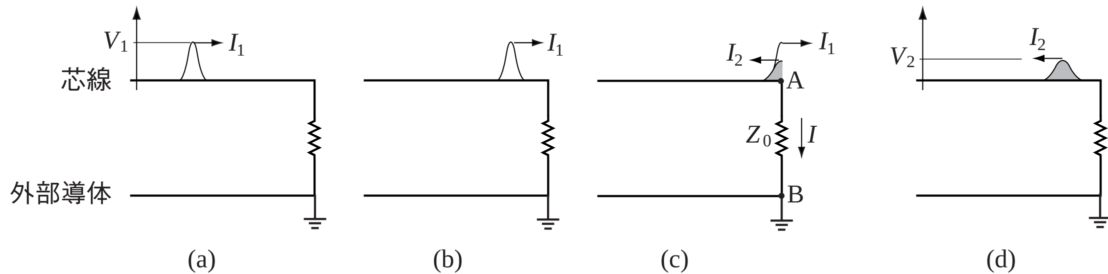


図 1.31: 信号伝搬と反射

図 1.31 は、芯線にパルス（白色の山）が入力され、左から右へと伝搬している様子を表しており、図 1.31(a)~1.31(d) は時間の経過を示している。図 1.31(c) の瞬間に、パルスが同軸ケーブルの右端に到達している。この右端には、Z_0 [Ω] の抵抗が芯線と外部導体の間に接続されている。パルスが同軸ケーブルの端に到達すると、そこで反射が起こり、新たに右から左へ伝搬するパルスが発生する（灰色の山）。

左から右へ伝わるパルスの電圧を V_1、このパルスによる電流を I_1 とし、反射によって発生するパルスの電圧を V_2、このパルスによる電流を I_2 とする。同軸ケーブル全体の抵抗は Z [Ω] なので、オームの法則から

$$V_1 = ZI_1 \quad , \quad V_2 = ZI_2 \tag{1.29}$$

の関係がある。図 1.31(c) の瞬間について考えると、点 A の電位は 2 つのパルスの電圧の和 $V_1 + V_2$ となる。このとき、抵抗 Z_0 の両端には電位差が発生するので、抵抗を通して電流 I が流れることになる。したがって、オームの法則から

$$V_1 + V_2 = Z_0 I \tag{1.30}$$

の関係を得る。また、点 A について、電流の保存則を考えると

$$I_1 = I + I_2 \tag{1.31}$$

となることが分かる。以上の関係（式 (1.29)∼(1.31)) を組み合わせると、入力されたパルスの電圧 V_1 と反射によって発生するパルスの電圧の間には

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} \tag{1.32}$$

の関係があることが分かる。

[機器の取り扱い]

オシロスコープの前面パネル操作法

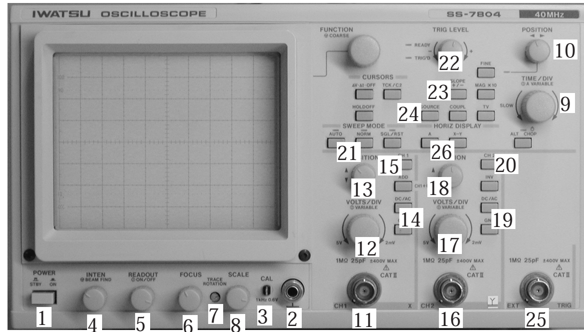


図 1.32: オシロスコープ：IWATSU SS-7802A, 7804, 7805A,

番号	前面指示名	動作説明
1	**POWER**	電源
2	**GND**	機器を接地するためのアース端子 (GROUND)
3	**CAL**	校正電圧端子 (CALIBRATION)、感度の校正、動作チェックに使用
4	**INTEN**	輝度, 画面の明るさの調整
5	**READOUT**	表示文字の明るさ (READOUT INTENSITY)
6	**FOCUS**	焦点調整
7	**TRACE ROTATION**	水平輝線の傾きを調整
8	**SCALE**	ブラウン管のスケールの照明 (SCALE ILLUMINATION)
9	**TIME/DIV**	水平軸 1 目盛 (1cm) あたりの時間値の切換 (値は管面左上に表示)
10	**POSITION**	水平軸方向の波形の位置を調整
11	**INPUT**	CH1(CHANNEL 1) または X 軸の入力端子
12	**VOLTS/DIV**	CH1 の垂直軸 1 目盛 (1cm) あたりの電圧値の切換 (値は管面左下に表示)
13	**POSITION**	CH1 の垂直軸方向の波形の位置を調整
14	**DC/AC** **GND**	CH1 の垂直軸入力切替 **DC/AC** を押す毎に DC と AC が切り替わる (AC のときは管面左下の "V" の上に "∼" を表示) **GND** を押す毎に GND ON(GND の表示) と GND OFF(入力信号の表示) が切り替わる (GND ON のときは管面左下に GND マークを表示)
15	**CH1**	**CH1** を押す毎に ON(CH1 の入力信号が管面に表示) と OFF(CH1 の入力信号が管面に表示されない) が切り替わる (ON のとき、管面左下に CH1 の VOLTS/DIV が表示)
16	**INPUT**	CH2(CHANNEL 2) または Y 軸の入力端子
17	**VOLTS/DIV**	CH2 の垂直軸 1 目盛 (1cm) あたりの電圧値の切換 (値は管面左下に表示)
18	**POSITION**	CH2 の垂直軸方向の波形の位置を調整
19	**DC/AC** **GND**	CH2 の垂直軸入力切替 **DC/AC** を押す毎に DC と AC が切り替わる (AC のときは管面左下の "V" の上に "∼" を表示) **GND** を押す毎に GND ON(GND の表示) と GND OFF(入力信号の表示) が切り替わる (GND ON のときは管面左下に GND マークを表示)
20	**CH2**	**CH2** を押す毎に ON(CH2 の入力信号が管面に表示) と OFF(CH2 の入力信号が管面に表示されない) が切り替わる (ON のとき、管面左下に CH1 の VOLTS/DIV が表示)
21	**SWEEP MODE**	掃引方式の選択 **AUTO** では自動的に掃引 **NORM** ではトリガ信号により掃引
22	**TRIG LEVEL**	同期 (TRIGGER) レベルの調整
23	**SLOPE**	同期スロープ "+" , "−" の選択
24	**SOURCE**	同期信号源の選択 **CH1** では CH1 入力の信号を同期信号源にする **CH2** では CH2 入力の信号を同期信号源にする **LINE** では 電源周波数 (福井では 60Hz) を同期信号源にする **EXT** では EXT INPUT に加えられた信号を同期信号源にする
25	**EXT INPUT**	外部同期端子
26	**HORIZ DISPLAY**	**A** では CH1, CH2 の入力を垂直軸として管面に表示 **X-Y** では CH1 の入力を X 軸、CH2 の入力を Y 軸として管面に表示 (管面に CH2 の入力信号を表示させた状態で **X-Y** を押す)

プローブ

観測する信号をオシロスコープに入力するにはプローブを使用する (図 1.33)。

プローブの先端には探針がついており、探針を覆うように矢形チップがついている。測定する際は、矢形チップを軽く押し込むようにして先端から探針を出し、探針のカギ形のピンを測定したい箇所に接続する。クリップコードが付いている方は、アースとして用いる (図 1.34)。

入力信号の最大電圧は、オシロスコープで許容される限界電圧より小さくなければならない。さもないとオシロスコープを破壊するおそれがある。また、入力信号を わざと 小さくして測定する場合がある。このため、プローブにはアッテネータ切替スイッチが付いており、入力信号の減衰比を [× 1], [× 10] に切り替えられる。切替スイッチを [× 1] にすると、波形は減衰することなく測定される。切替スイッチを [× 10] にすると観測波形は 1/10 に減衰されるので、オシロスコープで測定された電圧値を 10 倍にした値が実際の電圧値となる。本実験では、[× 1] で使用する。

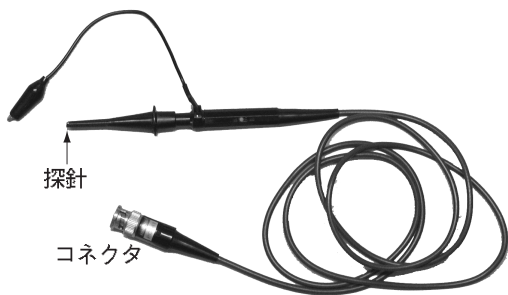


図 1.33: プローブ

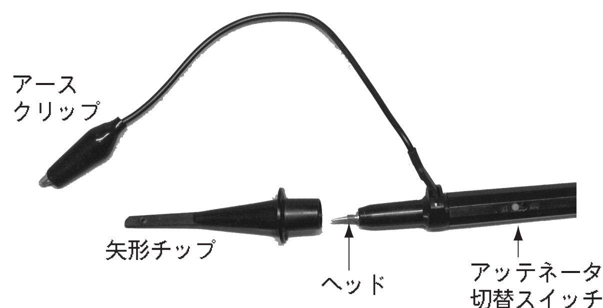


図 1.34: プローブ先端部

発振器

発振器は、信号を発生させる装置である。周波数、波形及び電圧を変化させることができる。

オシロスコープの校正電圧端子も発振器の一種であるが、周波数や波形、電圧を変化させることはできず、約 1 kHz の方形波が出力されている。

番号	前面指示名	動作説明
1	**POWER**	電源
2	**FREQ. RANGE**	発振周波数レンジ切替スイッチ
3	周波数ダイヤル	発振周波数の調節 (目盛板の値に **FREQ. RANGE** の倍率を掛けると出力周波数)
4, 4’	**OUTPUT**	信号出力 (正弦波方形波共用)、4’ 側は接地 (ケースと同電位)
5	**WAVE FORM**	出力信号波形 (正弦波、方形波の選択)
6	**ATTENUATOR**	出力減衰器 (0dB 〜 −50dB を 10dB ステップで 6 段切替え)
7	**AMPLITUDE**	出力電圧の振幅を連続変化

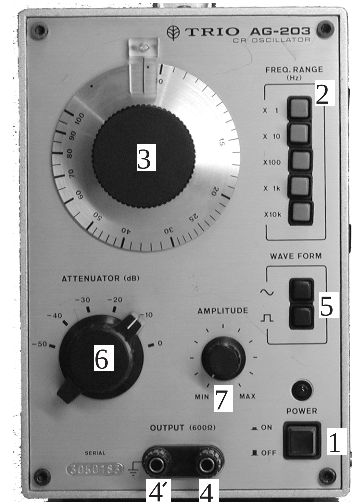


図 1.35: 発振器：TRIO AG-203

テスター

テスターは、直流電流、直流電圧、交流電圧および抵抗を測定する計測器である。それぞれ、測定範囲を切り換えて計測できる。ここでは、本実習に必要な抵抗の測定について説明する。

1. レンジ切換えスイッチを $\times 1$, $\times 10$, $\times 1$k, $\times 100$k Ω のいずれか (青字で書かれている) の適切な位置に合わせる。
2. 赤と黒のテストピン同士を接触させ、指針が $0\,\Omega$ に振れるように $0\,\Omega$ 調整つまみを回して合わせる。(レンジ切換えスイッチを切り換えたら、その都度、指針が $0\,\Omega$ に振れるように $0\,\Omega$ 調整つまみを回して合わせる。)
3. 赤と黒のテストピンを、測定する抵抗に接触させる。
4. メーターの振れを読みとる。読み取った値にレンジ切換えスイッチの倍率を掛け、抵抗の測定値を得る。
5. 使用後は、切換えスイッチを OFF にする。

番号	指示名
1	レンジ切換えスイッチ
2	$0\,\Omega$ 調整器
3	テストピン
4	目盛板



図 1.36: テスター

[**測定**]

A　オシロスコープの原理と取り扱い

はじめに

1. プローブの探針を **CAL** に接続し (プローブ先端のカギ形のピンを出力端子にひっかけると良い)、プローブのコネクタを CH1 の **INPUT** に接続する。これにより、校正電圧端子から出力された信号が CH1 に入力されることになる。

2. **HORIZ DISPLAY** で **A** を押して、管面の輝点を、水平軸 (X 軸) 方向は掃引波、垂直軸 (Y 軸) 方向は外部から入力される信号による表示にする。

3. **SWEEP MODE** で **AUTO** を ON にして、掃引方式を自動掃引にする。

4. **TRIGGER** のつまみを回し、印が中央となるようにする。

5. **CH1** を ON にし、**CH2** を OFF にする。これにより、管面に CH1 入力信号のみが映し出される。

6. CH1 の **GND** を押し、管面にアースの記号が表示されることを確認する。これにより、垂直偏向板は接地される。（再び **GND** を押すと接地は解除される。）

7. 水平な輝線が管面中央にくるように、**POSITION** で調整する。もし輝線が傾いていれば **TRACE ROTATION** を調節し、水平にする。また、**INTEN, FOCUS** で輝線の明るさと焦点を調整する。

8. **TIME/DIV** を適当に回してみる。例えば、**TIME/DIV** を **100ms/DIV** にすると、管面の横方向全体は 10 目盛だから、**100ms/DIV** $\times$ 10DIV $=$ 1000ms $=$ 1s , つまり 1 秒かけて輝点は管面の左端から右端まで動くことになる。次に、**TIME/DIV** を **100ms/DIV**, **50ms/DIV**, **10ms/DIV**, $\cdots$ のように回し、輝点が次第に線になっていく様子を確認する。

校正用信号の測定

1. CH1 の **GND** を押して接地を解除し、**AC/DC** を押して、**AC** に切り替える（管面の表示が $\tilde{\mathrm{v}}$ となる)。これにより、CH1 から入力された信号が垂直偏向板に接続される。

2. **SOURCE** で CH1 を選択する。（管面に選択されている信号が表示されている。）

3. CH1 の **VOLTS/DIV** を適当に調節し、方形波が管面に現れるようにする。この方形波の山から谷までの電圧を測定する。

   ・ **VOLTS/DIV** の値を読みとる際、管面左下の値に「>」が表示されていないことを確認する。もし表示されている場合は、**VOLTS/DIV** を押すと消える。

   ・ 管面縦方向の目盛は、管面左下の数値と対応している。（図 1.37）

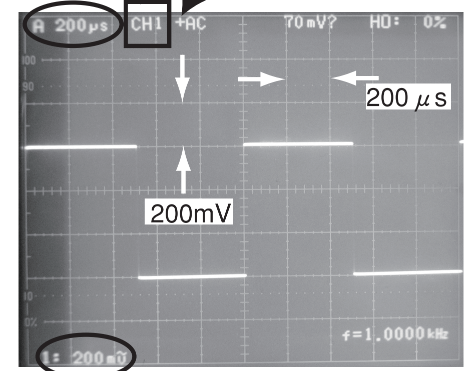


図 1.37: 波形の時間・電圧

4. **TIME/DIV** を適当に調節し、管面に現れる方形波が 2〜3 個になるようにする。この方形波の周期を測定する。更に、周波数を求める。

   ・ **TIME/DIV** の値を読みとる際、管面左上の値に「>」が表示されていないことを確認する。もし表示されている場合は、**TIME/DIV** を押すと消える。

   ・ 管面横方向の目盛は、管面左上の数値と対応している。（図 1.37）

5. **CAL** に記されている、周波数と電圧の値を上の結果と比較する。

発振器の信号の測定

1. 発振器の **ATTENUATOR** を –**10** の位置に合わせ、**AMPLITUDE** を右いっぱいに回す。**FREQ. RANGE** を ×**10** に、**WAVE FOAM** を方形波に合わせる。
2. 発振器の **OUTPUT** と CH2 の **INPUT** をプローブで接続する。プローブの先端と発振器の **OUTPUT** は接続しにくいので、プローブの先端の矢形チップをはずし、ヘッドを赤色リード線のワニぐちクリップではさんで接続する。
3. 発振器の接地側の **OUTPUT** と オシロスコープの **GND** を黒色リード線で接続する。プローブのアース用クリップを用いてもよい。
4. **CH2** を ON にし、**CH1** を OFF にして、管面に CH2 入力信号のみを映し出す。これにより、CH2 から入力された信号が垂直偏向板に接続される。
5. CH2 の **GND** を押して、管面にアースの記号が表示されることを確認する。水平な輝線が管面中央にくるように **POSITION** を調整する。
6. CH2 の **GND** を押して接地を解除し、**AC/DC** を押して、**AC** に切り替える（管面の表示が ṽ となる)。これにより、CH2 から入力された信号が垂直偏向板に接続される。
7. **SOURCE** で CH2 を選択する。（管面に選択されている信号が表示されている。）
8. CH2 の **VOLTS/DIV** を適当に調節し、この方形波の山から谷までの電圧を測定する。
9. **TIME/DIV** を適当に調節し、管面に現れる方形波が 2〜3 個になるようにする。この方形波の周期を測定する。更に、周波数を求める。
10. 発振器から出力されている周波数を、発振器の **FREQ. RANGE** と周波数ダイヤルから読み取り、上の結果と比較する。



図 1.38: リード線 (バナナプラグーバナナプラグ)

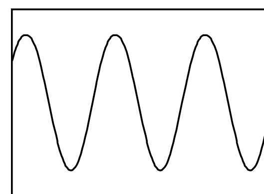


図 1.39: リード線 (ワニぐちクリップーバナナプラグ)

トリガー回路

1. 発振器の **WAVE FORM** を正弦波にする。
2. **SWEEP MODE** を **NORM** にして、トリガー信号による掃引に切り換える。
3. 水平方向の位置を **POSITION** で調節し、波形の左端が見えるようにする。
4. **TRIGGER** のつまみを左右に回して変化させ、管面に現れる波形の変化を観察する。（管面の波形を右へ動かして波形の左端を表示する。波形の左端の変化に注目して、図に描いて記録すること。）

5. **TRIGGER** のつまみを調節して、波形の左端が中途（右図）となるようにする。



SLOPE を “**+**” から “**−**” にしたときの波形の変化を観察する。（管面に選択されている **SLOPE** が表示されている。）

（管面の波形を右へ動かして波形の左端を表示する。波形の左端の変化に注目して、図に描いて記録すること。）

6. **CH1**、**CH2** を共に ON にして、管面に CH1 入力 (1000Hz の方形波) と CH2 入力 (発振器からの正弦波) の波形を同時に映し出す。

7. **SOURCE** で **CH1** を選択する。発振器の周波数を「校正用信号 **CAL** の周波数の半分」付近でわずかに動かし、管面の波形の様子を観察する。（図に描いて記録すること。）

8. **SOURCE** で **CH2** を選択する。発振器の周波数を「校正用信号 **CAL** の周波数の半分」付近でわずかに動かし、管面の波形の様子を観察する。（図に描いて記録すること。）

B　交流回路

RC 回路の特性

1. オシロスコープ、発振器、抵抗 $R = 1\text{k}\Omega$ およびコンデンサー $C = 0.1\ \mu\text{F}$ を図 1.40 のように接続する。抵抗やコンデンサーの接続の仕方は、図 1.42 の写真を参照のこと。なお、抵抗については R_1, R_2, R_3 と表示された 3 種類のブロックが用意されている。それぞれ、どのような電気抵抗となっているか、テスターを用いて測定してから使用すること。

2. 表計算ソフトを用いて測定結果を予想する。

   周波数の範囲 $f = 10$ Hz 〜 50 kHz について、式 (1.16) (39 ページ) を用いて、$\dfrac{V_0^R}{V_0}$ および $\dfrac{V_0^C}{V_0}$ を計算する。縦軸を $\dfrac{V_0^R}{V_0}$ および $\dfrac{V_0^C}{V_0}$、横軸を f としたグラフを作成する。

3. 計算結果のグラフを見て、測定を行う周波数の組（10 種類程度）を決める。（変化が緩やかな範囲は荒く、変化が激しい範囲は細かく測定する必要がある）

4. 選んだ周波数に対する V_0（$V(t)$ の最大値）の値を測定する。（V_0 は概ね一定の値であるが、周波数の変化に伴って大きさは変わっていくことに注意）

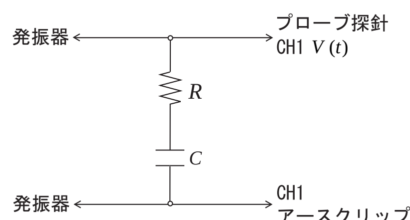


図 1.40: 測定 1 の接続

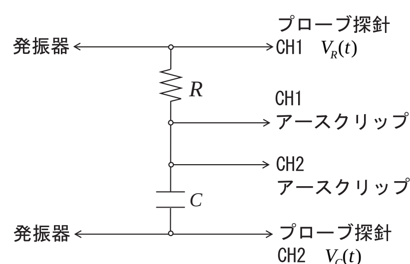


図 1.41: 測定 5 の接続 (1)

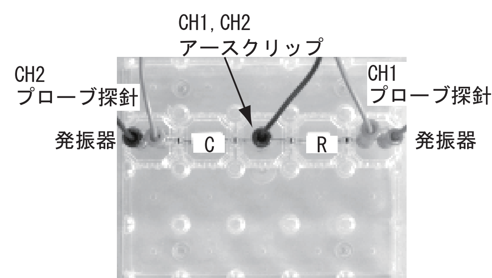


図 1.42: 測定 5 の接続 (2)

5. 図 1.41 のようにオシロスコープ、発振器、抵抗 $R = 1\text{k}\Omega$ およびコンデンサー $C = 0.1\ \mu\text{F}$ を接続する。選んだ周波数に対して、V_0^R（$V_R(t)$ の最大値）, V_0^C（$V_C(t)$ の最大値）を測定する。

6. 測定 4 と 5 の結果を用いて、$\dfrac{V_0^R}{V_0}$ および $\dfrac{V_0^C}{V_0}$ の測定結果を 2 と同じグラフに表す。

電気容量の測定

1. 図 1.43 のように、アルミ板の間に紙を挟んだものはコンデンサーとなる。この電気容量を測定する方法を考えよ。[RC 回路の特性] で作ったグラフにおける 2 本の曲線の交点に注目すること。（周波数に対する電圧の変化をすべて測定する必要はない。）

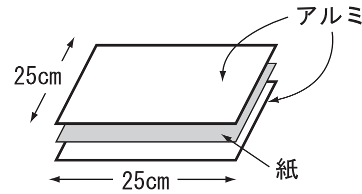


図 1.43: アルミ板のコンデンサー

2. 紙 1~4 枚を挟んだ場合の電気容量 C を測定する。ダンボールでアルミ板コンデンサーをはさんで、上に重しをのせること。

3. 紙の厚さを測定し、アルミ板間の紙の厚さ d を横軸に、それぞれの場合の電気容量 C を縦軸にしてグラフを作成する。また、式 (1.3) (34 ページ) にしたがって電気容量を計算し、測定結果と比較せよ。なお、紙の比誘電率は $\varepsilon_r = 2.4$、真空の比誘電率は $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [C/V·m] である。

RL 回路の特性

1. オシロスコープ、発振器、抵抗 $R = 1\text{k}\Omega$ およびコイル L=100 mH を図 1.44 のように接続する。

2. 表計算ソフトを用いて測定結果を予想する。

   周波数の範囲 $f = 10$ Hz 〜 5 kHz について、式 (1.17) (39 ページ) を用いて、$\dfrac{V_0^R}{V_0}$ および $\dfrac{V_0^L}{V_0}$ を計算する。縦軸を $\dfrac{V_0^R}{V_0}$ および $\dfrac{V_0^L}{V_0}$、横軸を f としたグラフを作成する。

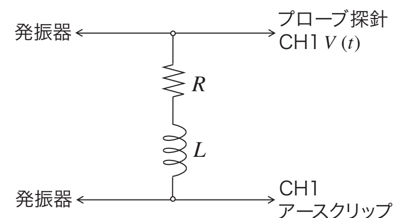


図 1.44: 測定 1 の接続

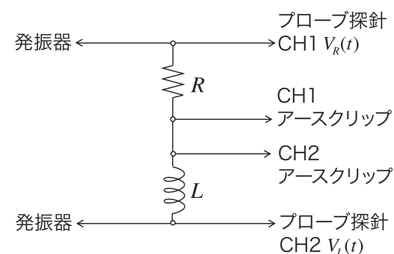


図 1.45: 測定 5 の接続

3. 計算結果のグラフを見て、測定を行う周波数の組（10 種類程度）を決める。（変化が緩やかな範囲は荒く、変化が激しい範囲は細かく測定する必要がある）

4. 選んだ周波数に対する V_0（$V(t)$ の最大値）の値を測定する。（V_0 は概ね一定の値であるが、周波数の変化に伴って大きさは変わっていくことに注意）

5. オシロスコープ、発振器、抵抗 $R = 1\text{k}\Omega$ およびコイル $L = 100$ mH を図 1.45 のように接続する。選んだ周波数に対して、V_0^R（$V_R(t)$ の最大値）, V_0^L（$V_L(t)$ の最大値） を測定する。

6. 測定 4 と 5 の結果を用いて、$\dfrac{V_0^R}{V_0}$ および $\dfrac{V_0^L}{V_0}$ の測定結果を 2 と同じグラフに表す。

C　同軸ケーブル中の信号伝搬

短い時間幅のパルスによるトリガー

1. パルス発生回路 (図 1.46) の 50nsec 信号の端子をオシロスコープの CH1 に接続し、プローブのアース用クリップはアース端子に接続する。
2. **SOURCE** で CH1 を選択して、短い時間幅の入力信号をトリガー信号とできるように、各種のつまみを調整する。この方法では、トリガー条件を探すことができても、画面にはトリガーに使われた入力信号は表示されない。
3. パルス発生回路の「トリガー用信号」をオシロスコープの CH2 に接続する。**SOURCE** を CH2 に変更して、CH1 と CH2 の両方の信号が画面で見えるように各種設定を調整する。**SLOPE** は ＋ にしておくこと。
4. 画面で両方の信号が確認できたら、CH2 に接続されているプローブをオシロスコープの外部同期端子 (**EXT TRIG**, **EXT INPUT**) に接続変更する。**SOURCE** を EXT TRIG に変更して、CH1 の信号（50nsec) が画面で見えることを確認する。

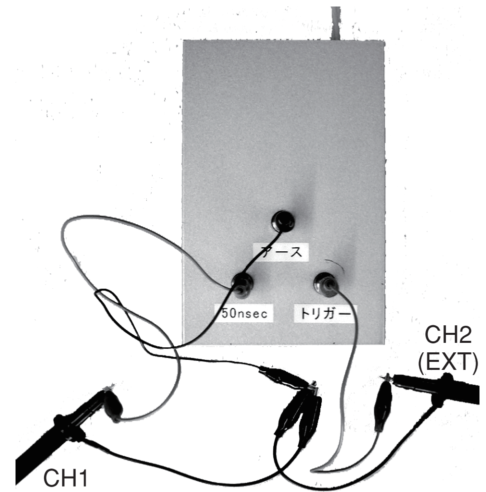


図 1.46: パルス発生回路


図 1.47: 同軸ケーブル

以下、外部同期端子のプローブは外さずに、プローブを３本用いて測定を行なうこと。

同軸ケーブル中の信号伝搬速度

1. パルス発生回路の 50nsec 信号を同軸ケーブル（図1.47）の芯線に接続する。同軸ケーブルの外部導体（金網）はパルス発生回路のアース端子に接続する。なお、オシロスコープの CH1 は、50nsec 信号を入力した同軸ケーブルの芯線に接続し、アース用クリップはパルス発生回路のアース端子に接続する。トリガー用信号は変更しない。
2. 同軸ケーブルの他端の芯線をオシロスコープの CH2 に接続し、プローブのアース用クリップは外部導体に接続する。オシロスコープの画面で、CH1 と CH2 の信号を確認する。

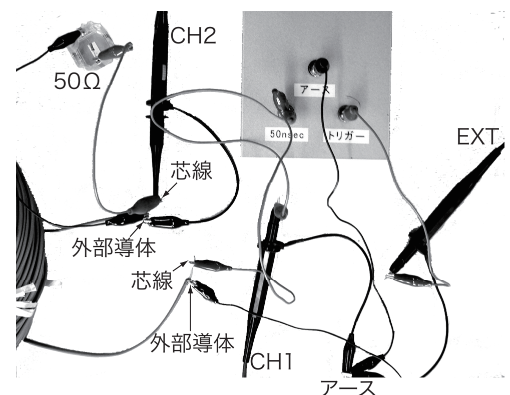


図 1.48: 同軸ケーブルとの接続

3. オシロスコープの画面には、図 1.49 のように 2 つの信号が見えるはずである。CH1 の波形にみえる最初の山はパルス発生回路からの入力信号で、CH2 の波形にみえる最初の山は同軸ケーブルを通過して来た信号である。この 2 つの山の時間間隔を測定せよ。

4. CH1 および CH2 に見えるその他の山（谷）は、同軸ケーブルの端で反射した信号である。観測される山（谷）の時間関係を測定せよ。

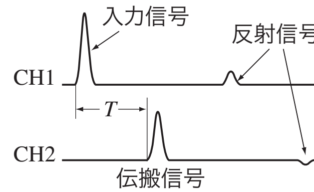


図 1.49: オシロスコープで観測される信号

信号の反射

1. CH2 のプローブが接続されている側の芯線と外部導体を導線で短絡する。オシロスコープに現れる信号がどのように変化するか、観測せよ。（図に描いて記録すること。）

2. CH2 のプローブが接続されている側の芯線と外部導体の間に 50 Ω の抵抗（交流回路の測定で用いた電気抵抗ブロックを用いる）を接続する。オシロスコープに現れる信号がどのように変化するか、観測せよ。（図に描いて記録すること。）

[課題]

1. 図 1.2 (30 ページ) において $V_H > 0$, $V_H < 0$ のそれぞれの場合について、電子の受ける力の向きを図示せよ。

2. 図 1.4 (31 ページ) では、周期についての関係が $T_H : T_V = 2 : 1$ の場合について描かれている。$T_H : T_V = 3 : 1$ の場合に、管面に表れる波形を図示せよ。

3. 図 1.7 (33 ページ) において、管面に表れる波形を図示せよ。

4. [校正用信号の測定] 3, 4, 5 で得られた結果を報告せよ。

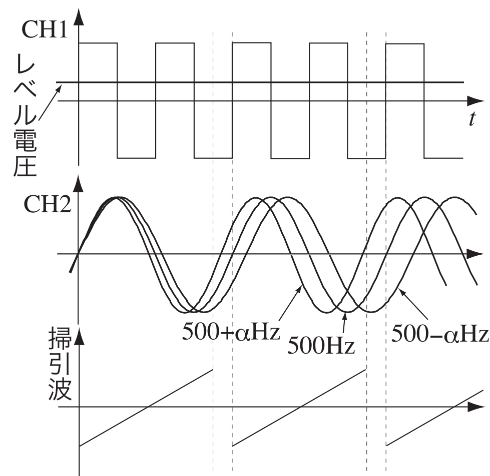
5. [発振器の信号の測定] 8, 9, 10 で得られた結果を報告せよ。

6. [トリガー回路] 4, 5 の観察結果を報告せよ。また、このように波形が変化する理由を説明せよ。

7. [トリガー回路] 7, 8 の観察結果を報告せよ。図 1.50 を参考にして、くりかえされる掃引波に対して、CH1 と CH2 の波形がどのように変化するかを図に描いて、観察結果が得られる理由を説明せよ。

8. [RC 回路の特性] 結果を報告せよ。

9. [電気容量の測定] 結果を報告せよ。



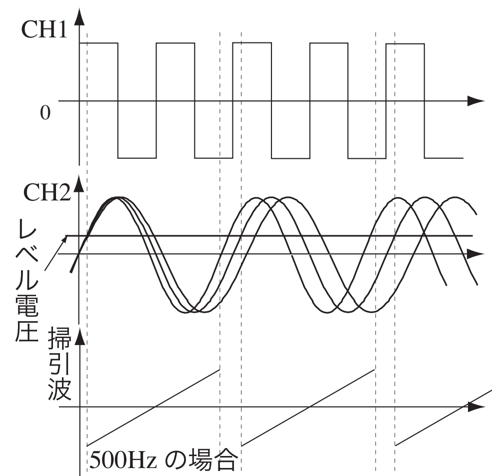


図 1.50: 測定 7　　　測定 8

10. [RL 回路の特性] 結果を報告せよ。

11. [RL 回路の特性] RC 回路との対応を考察せよ。

12. 2 つの周波数の異なる電気信号が混じっているとき、RC 回路あるいは RL 回路を用いると 2 つの電気信号を分離することができる（図 1.51 参照)。電気回路をどのように用いればよいか。

    高い周波数の電気信号を取り出す回路を high-pass-filter、低い周波数の電気信号を取り出す回路を low-pass-filter という。

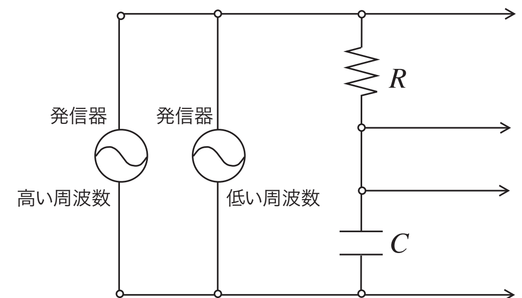


図 1.51: filter 回路

13. [同軸ケーブル] 式 (1.23) (42 ページ) を確認せよ。また、単位の関係を確認せよ。

14. [同軸ケーブル] 式 (1.28) (42 ページ) の単位の関係と数値を確認せよ。

15. [同軸ケーブル] 同軸ケーブル中の信号伝搬速度の測定結果を報告し、結果を説明せよ。測定に用いた同軸ケーブルの長さは 100m である。また、伝搬速度の計算は式 (1.26) (42 ページ) に基づいておこなう。誘電体の誘電率は $2\varepsilon_0$、透磁率は μ_0 である。

16. [同軸ケーブル] 信号の反射の観測結果を報告せよ。また、43~44 ページの「同軸ケーブルでの信号の反射」を参考にして、信号の反射についての結果を説明せよ。なお、実験に用いた同軸ケーブルの電気抵抗は $Z = 50\Omega$ である。

[参考書]

1. ケイン、スターンハイム著 「ライフサイエンス物理学」18〜20 章

2. 吉田卯三郎、武居文助、橘芳實、武居文雄 共著 「物理学実験」65 節

3. Raymond A. Serway 著、松村博之 訳 「科学者と技術者のための物理学」

2　放射線計測

[目的]

放射線は医療や農学、分子生物学、工学等に応用され広く利用されている。

医療においては、健康診断における胸部 X 線間接写真、特定の組織や臓器に親和性をもつ薬剤を RI (Radio Isotope) で標識して生体に投与し、その分布を追跡して病気の診断に役立てるトレーサー利用、高エネルギー γ 線放出核種を用いた外照射、β 線放出核種を用いた内用療法など、診断と治療の手段として用いられている。

この実験では放射性元素の崩壊によって放出される β 線を Geiger-Müller 計数管を用いて計数し、崩壊現象のもつ統計的特徴を理解する。また、計数装置の効率および周囲の物質で β 線が散乱・吸収されることによる補正を評価し、計数率と実際の放射性元素の崩壊率との関係の理解を深める。

[解説]

A　放射線

1. 放射線発見の歴史

1895	X 線の発見	レントゲン
1896	ウランの放射能の発見	ベクレル
1898	ポロニウムとラジウムの発見	キュリー夫妻
1898	α 線と β 線の発見	ラザフォード
1900	γ 線の発見	ヴィラール
1932	中性子の発見	チャドウィック

1895 年、レントゲンは真空放電の研究中に未知の放射線が出ていることに気付いた。この放射線は、透過力が強く、写真乾板を感光させ、蛍光を光らせる性質を持っており、X 線と名づけられた。これが最初に発見された放射線である。翌年の 1896 年、ベクレルは蛍光やりん光を出す物質が X 線のような放射線を出すかどうかを調べていたところ、偶然、ウランの化合物が写真乾板を感光させる強い放射線を出すことを見出した。1898 年、キュリー夫妻は放射性元素ポロニウム、そしてウランやポロニウムより強い放射線を出すラジウムを発見した。その後 1898 年、ラザフォードはウランから 2 種類の放射線が出ていることを見いだし、1900 年にヴィラールは X 線に似た強い放射線を発見した。これらの放射線はラザフォードにより、α 線、β 線、γ 線と名付けられた。さらに 1932 年、チャドウィックにより中性子が発見された。

2. 放射線の種類

放射性元素から放出される α 線、β 線、γ 線やこれらと同程度以上のエネルギーをもって運動している素粒子、原子核、電磁波などを総称して放射線という。

物質を構成する原子は原子核と電子から成り、原子核は陽子と中性子からなる。エネルギー的に不安定な原子核がより安定な状態になる際に放出されるのが α 線、β 線、γ 線である。

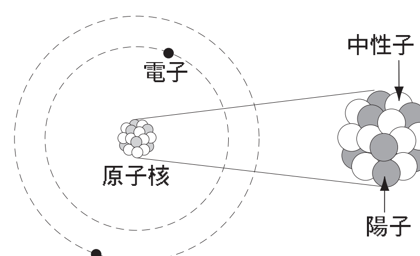


図 2.1: 原子の構造

α 線は He の原子核 (質量数=4, 電荷=+2e) の流れ、β 線は高速の電子の流れ、γ 線は波長の非常に短い電磁波 (波長が 10^{-10}cm 以下) である。透過力は γ 線、β 線、α 線の順に強い。

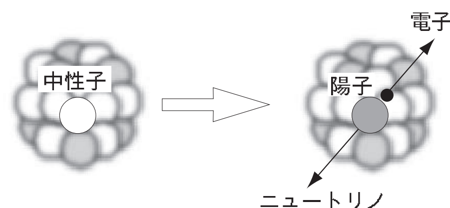


図 2.2: β^- 崩壊

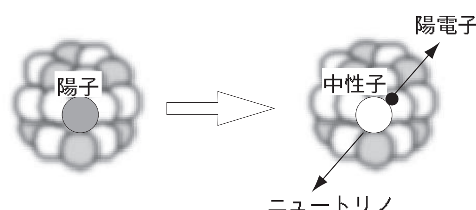


図 2.3: β^+ 崩壊

α 線	He 原子核、正の電荷を持つ
β^- 線	電子、負の電荷を持つ
β^+ 線	陽電子、正の電荷を持つ
γ 線	波長が短い電磁波 (波長が 10^{-10}cm 以下)
X 線	波長が短い電磁波 (波長が 10^{-10}cm 以下)
中性子線	中性子、電荷を持たない

β 線には正、負の電荷をもつ 2 種類がある。負の電荷をもつ β^- 線は高速の電子であり、原子核中の 1 個の中性子が陽子に変わり、電子とニュートリノが放出される過程から生じる。このとき、原子番号は 1 だけ増加し質量数は変わらない。一方、正の電荷をもつ β^+ 線は、電子と電荷の符号だけが反対の **陽電子** が正体であり、1 個の陽子が中性子に変わり、陽電子とニュートリノが放出される過程によって生じる。この場合、原子番号は 1 だけ減少し質量数は変わらない。

X 線は、γ 線と同じ電磁波であるが、γ 線が原子核から放射されるのに対して、X 線は核の外部の現象に基づいて放射される。高速の電子を金属に衝突させ、電子を急激に減速させると、X 線が発生する。これは制動 X 線ともよばれ、健康診断などの X 線検査に使われる

3. 放射線の性質を表す量

放射線を物質に照射したとき、その物質におきる影響をあらわすために **線量** という概念がもちいられる。しかし放射線には様々な種類や強度、エネルギーの違いがあり、放射線の量を直接的に表すのは難しく、物質に対する作用の結果、生じる電気量や化学的な変化の程度で表すしかない。このような方法で表した線量は、その物質に与えたエネルギーとほぼ比例しているが、放射線の生体への影響の程度とは必ずしも一致しない。物理量としての線量は、影響の大きさを正しく表現し、測定が簡単で、定義が明解であることが要求される。このような条件をすべて備えるような量はないため、これまで、目的に応じて様々な線量が定義され、用いられてきた。以下に代表的なものについて説明する。

(a) 放射線のエネルギー (電子ボルト：eV)

1 eV は 1.6 $\times 10^{-19}$ J である。可視光線は 2 eV 程度の電磁波であり、γ 線は MeV 程度の電磁波である。(MeV はメガ電子ボルトと読み、メガは 10^6 を意味する。)

(b) 放射線を放出する放射能の強さ (ベクレル: Bq)[†]

原子核の壊変が 1 秒に 1 回起こっているときを 1 Bq と定義する。

[†]本実習では、^{90}Sr からの 2 つの β 線測定する。(わずかに他の β 線と γ 線もある。) 2 つの β 線はエネルギーが異なるが、これらを区別せずに、放射線の個数を測定する。したがって、1 秒あたりに測定される β 線の個数の半分について、幾何学的補正などを施した結果が、測定に用いる ^{90}Sr の「放射能の強さ」(Bq) となる。

(c) 吸収線量 (グレイ: Gy)‡

放射線が物体に当たった場合、その物体の単位質量がどれだけのエネルギーを吸収したかを表す。物質や人体 1kg あたり 1J の放射線によるエネルギーが与えられたとき、1Gy の放射線量を吸収したという。

(d) 線量当量 (シーベルト: Sv)

放射線の人体への影響を表す量。放射線には α 線、β 線など色々あるが、放射線の種類によって細胞のなかの原子に電離を起こさせる程度が異なるので、同じ量の吸収線量を与えても、現れる影響の度合いが異なる。物質への影響は、与えられたエネルギーではなく、物質中でどれだけ電離が起こったかによる。このような放射線の種類によって生じる影響が、放射線荷重係数として調べられていて (右表)、受けた放射線の種類に関係なく、影響を表す量として、が用いられる。線量当量の単位には Sv(シーベルト) が用いられる。

放射線の種類	放射線荷重係数
β 線	1
γ 線	1
陽子	5
中性子線	5 〜 20
α 線	20

$$\text{線量当量} = \text{吸収線量} \times \text{放射線荷重係数}$$

(e) 実効線量当量 (シーベルト: Sv)

放射線によって体のあらゆる部位が一様に被曝することはまれであるし、体の奥深くにある臓器は遮断されるために、体表面に比べて線量等量は小さくなるのが普通である。このように不均一に被曝をした場合は、状況によって危険性が異なってくる。不均一被曝の場合でも人に対する危険性の尺度を与える量として、**実効線量当量** が

$$\text{実効線量当量} = \sum_{\text{組織}} (\text{線量当量})_{\text{組織}} \times (\text{荷重係数})_{\text{組織}}$$

のように定義されている。ここで、荷重係数は臓器ごとに下表のように決められている。

生殖腺	骨髄	結腸	肺	胃	膀胱	乳房	肝臓	食道	甲状腺	皮膚	骨表面	その他
0.20	0.12	0.12	0.12	0.12	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.01	0.01	0.05

4. 自然放射線

天然に存在する放射線を自然放射線という。自然放射線は主に、宇宙線、大地からの放射線、食べ物からの放射線、ラドンからの放射線の 4 種類がある。

(a) 宇宙線

宇宙空間から地球に入射するエネルギーの高い放射線を宇宙線という。地球に入射する宇宙線を一次宇宙線、それが大気圏内の原子核と相互作用して生み出した宇宙線を二次宇宙線と云う。

一次宇宙線の大部分は陽子であり、他は少量の電子、He, Li, Be, B, C, N, O, Fe などの高エネルギー原子核である。エネルギーは 0.1GeV から 10^{20}GeV 程度である。(GeV はギガ電子ボルトと読み、ギガは 10^9 を意味する。)

‡Gy, Sv の単位で表す放射線の性質は、どんな種類 (α,β,γ,$\cdots$)、どんなエネルギー、どんな物質に照射、どんな方法で、などの情報を含んでいる。さまざまな状況に対応できるように、放射線線種ごとに Bq から Sv への変換係数がまとめられている。

宇宙線が大気に入射すると空気の原子核と相互作用して多数の中間子を発生する。それらの中間子は、更に次々と、別の原子核と相互作用を起こしたり、崩壊して γ 線や μ 粒子になる。この現象を空気シャワーという。地上で観測される宇宙線の約 70 %が μ 粒子で、約 30 %が電子成分である。

(b) 大地からの放射線

天然に放射性物質が存在している。主なものは、カリウム 40、ウラン 238、トリウム 232 で、このほかに ルビジウム 87、ウラン 235 などがある。これらの放射性物質の含有量は地質などによって異なる。花こう岩地帯では土壌や岩石にカリウム 40 やウランなどが多く含まれているため、大地からの放射線が強い。

(c) 食べ物からの放射線

大地や海水中に含まれる放射性物質は、野菜や魚などに吸収され、食べ物を通して体内に取り込まれる。その代表的なものはカリウム 40 である。

(d) ラドンからの放射線

ラドンは空気の 7.5 倍の重さを持つ気体で、ウラン 238 やトリウム 232 の壊変によって生じる。ラドンは大地からしみ出してくるが、地域によって異なる。また、気密性の高い建物ほど室内のラドン濃度も高くなる。

5. 放射性物質

上に述べた天然に存在する放射性物質は地球創生時（約 46 億年前）から存在しているもので、寿命の長い物質である。たとえば、ウラン 238 は α 線を出して トリウム 234 に崩壊するが、ウラン 238 の量が半分になるまでの時間（半減期）は 4.468×10^9 年 (44.68 億年) である。

一方、放射線を用いる実験や医療では、半減期が短い物質が選ばれる（さもないと役に立たない）。たとえば、陽電子断層法 (Positron Emission computed Tomograpy) では、炭素 11 (半減期: 20 分)、窒素 13 (10 分)、酸素 15 (2 分)、フッ素 18 (110 分) などの放射性物質が使用される。このような短寿命の放射性物質は天然には存在せず、加速器を用いて人工的に生成される。

本実験で用いる放射性物質は ${}^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ (ストロンチューム) で、その半減期は 28.8 年である。${}^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ は β^- 崩壊により ${}^{90}_{39}\mathrm{Y}$ (イットリウム) となる。${}^{90}_{39}\mathrm{Y}$ は更に半減期 64.1 時間で β^- 崩壊し、安定核 ${}^{90}_{40}\mathrm{Zr}$ となる。${}^{90}_{38}\mathrm{Sr} \rightarrow {}^{90}_{39}\mathrm{Y}$ での β 線のエネルギーは 0.55MeV であり、${}^{90}_{39}\mathrm{Y} \rightarrow {}^{90}_{40}\mathrm{Zr}$ での β 線のエネルギーは 2.27MeV である。

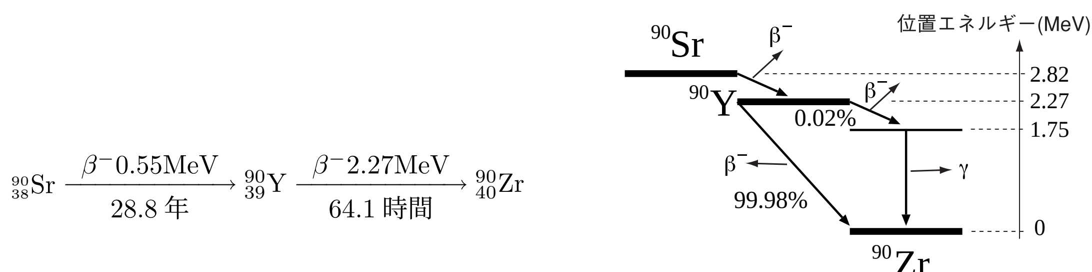


図 2.4: ${}^{90}\mathrm{Sr}$ の崩壊過程

6. 吸収係数

放射線である高速の粒子は物質中を進行すると、物質中の原子と衝突しそのエネルギーを失っていく。その結果、放射線の強度は次第に減衰する。微小距離 dx だけ進むときの強度の減少分 dI は、その点での放射線の強度 I と通過した微小距離 dx とに比例し、

$$dI = -\mu I dx \tag{2.1}$$

と表わせる。ここで、μ は比例定数で、吸収係数と呼ぶ。式 (2.1) を積分すると、

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\mu x} \tag{2.2}$$

が得られる。ただし、I_0 は物質へ入る前の放射線の強度であり、x は放射線が物質を通過した距離である。

7. 半減期

放射性物質が放射線を出して崩壊を起こす現象は確率的に理解することができる。N 個の原子を含む放射性物質があり、崩壊確率を λ とすると、単位時間あたりに崩壊する原子の数は、そのとき存在する原子の数 N に比例するので

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{2.3}$$

である。式 (2.3) を積分すると、

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{2.4}$$

となる。放射性物質の原子の数が $N_0/2$ になるまでに経過する時間 $T = \log_e 2/\lambda$ を半減期という。

B 計数の統計性

1. 計数の統計誤差

放射性物質の崩壊は確率的過程で起るため、同じ条件下でも、放射線の計数値は測定するたびに異なったものとなる。放射性物質の崩壊には、次のような特徴がある。

(a) ごく少量の放射性物質でもその中に含まれる原子の数は桁違いに多い (例えば、1mg のラジウムに含まれるラジウム原子の数は約 10^{18} 個である)。

(b) 1個の原子が単位時間に放射線を放出する確率が非常に小さく、計測される放射線の **計測数** の平均値 $\langle N \rangle$ は、放射性物質の半減期が長いときには、測定時間内で一定に保たれている。

(c) 放射線は個々の原子から独立に、任意の方向に放出される。

放射性物質内の一個の原子が崩壊する確率が、単位時間当たりに $p\ (p \ll 1)$ であるとする。また、崩壊は原子ごとに独立におきる。いま、N_I 個の原子があるとすると、期待される平均の崩壊個数 $\langle N\rangle$ は

$$\langle N\rangle = N_I\, p \tag{2.5}$$

と表わされる。N_I 個の原子のうち、N 個の原子が単位時間に崩壊する確率 $P(N)$ は、反復試行の確率として、

$$P(N) = {}_{N_I}C_N p^N (1-p)^{N_I - N} \tag{2.6}$$

となる。ここで、${}_{N_I}C_N$ は二項係数である。N_I は崩壊により時間とともに減少するが、実習に用いられる密封線源中に含まれる放射性物質内の原子の数は $\sim 10^{23}$ と大きく、確率 p は小さいので N_I は変わらないと近似できる。今 N_I は非常に大きいので、式 (2.6) で $N_I \to \infty$ の極限を考えると

$$\begin{aligned}
\lim_{N_I\to\infty} P(N) &= \lim_{N_I\to\infty} {}_{N_I}C_N \left(\frac{\langle N\rangle}{N_I}\right)^N \left(1-\frac{\langle N\rangle}{N_I}\right)^{N_I-N} \\
&= \frac{\langle N\rangle^N}{N!} \lim_{N_I\to\infty} \frac{1(1-\frac{1}{N_I})(1-\frac{2}{N_I})\cdots(1-\frac{N-1}{N_I})}{(1-\frac{\langle N\rangle}{N_I})^N} \left(1-\frac{\langle N\rangle}{N_I}\right)^{N_I} \\
&= \frac{\langle N\rangle^N}{N!} \mathrm{e}^{-\langle N\rangle}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

が得られる （95 ページ、付録 H 参照)。

以上より、同じ測定時間で くりかえし 放射線の計測をおこない、計測数が $N_1, N_2, \cdots\cdots$ となったとき、これらの平均値を $\langle N\rangle$ とすると、個々の計測に際して実際に得られる計測数が N となる確率は

$$P(N) = \frac{\langle N\rangle^N}{N\,!}\, \mathrm{e}^{-\langle N\rangle} \tag{2.8}$$

という分布になることがわかる。この分布を **ポアッソン分布** という。

2. 測定値の取り扱い

式 (2.8) のポアッソン分布から、標準偏差をもとめると $\sigma = \sqrt{\langle N\rangle}$ となることがわかる。（100 ページ、付録 M 参照）1 度だけ計測したときの計測数 N が $\langle N\rangle - \sigma \le N \le \langle N\rangle + \sigma$ となる確率は約 68% である。また逆に、これは真の平均値 (非常に多くの回数の測定による平均値）$\langle N\rangle$ が $N-\sigma \le \langle N\rangle \le N+\sigma$ となる確率に等しい。一回または有限回 (少数回) の実験では真の平均値 $\langle N\rangle$ を求めることはできないので、標準偏差 $\sigma = \sqrt{\langle N\rangle}$ のかわりに $\sqrt{N}$ を用いて、真の平均値からのずれの目安とする。このような意味で通常測定値を $N \pm \sqrt{N}$ と表わす。この実験では有限回のかわりに測定時間を長くし、測定値を **計数率** (単位時間あたりの計測数) で表わすことにする。測定時間が T のとき計数率の測定値を $\frac{N}{T} \pm \frac{\sqrt{N}}{T}$ と表わす。

C　Geiger-Müller (G-M) 計数管の構造と機能

図 2.5 に示したように、Geiger-Müller 計数管の金属円筒には、不活性ガス（ネオン、アルゴン）が封入されており、円筒の中心軸にそって細い金属線が張られている。金属線には正の電位が与えられ、金属円筒はアース電位となっている。

大きなエネルギー（高速）の荷電粒子がガスの中を通ると、ガスの分子をイオン化して正イオンと電子を作る。生じたイオンは強い電場の中におかれているため、正イオンは金属円筒に、電子は金属線に向って移動する。強い電場のもとではとくに電子はすみやかに移動し、自分も新しくガス分子を電離しうるような大きなエネルギーをもつ。このようにして、イオン化されてできた電子がさらに新しくガス分子をイオン化して次の電子を電離し、ネズミ算式に非常に多数の電子の群をつくる。このような現象を電子ナダレと呼び、このような方式での電離電流の増幅をガス増幅を呼ぶ。G-M 計数管はこのガス増幅によって得られた大きな電離電流を電子回路によって電圧パルスとして増幅し、１個１個の粒子の検出をおこなう。

G-M 計数管を計数回路に接続し、一定の位置に放射線源をおいて、計数管の印加電圧と計数率の関係を調べると図 2.6 のようになる。印加電圧が A∼B の領域では計数率が電圧によらずほぼ一定でこの領域をプラトーと呼ぶ。計数管の印加電圧はこの領域の電圧を用いる (本実習では 450V)。印加電圧が B をこえると連続放電が起り、計数管は壊れるので注意が必要である。

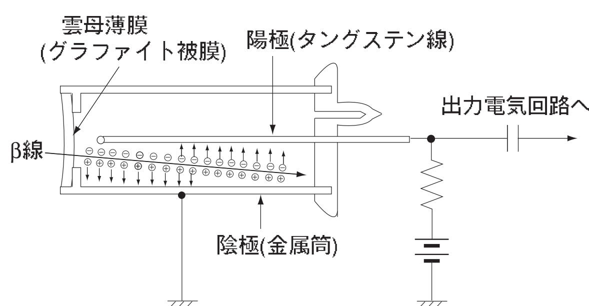


図 2.5: G-M 計数管

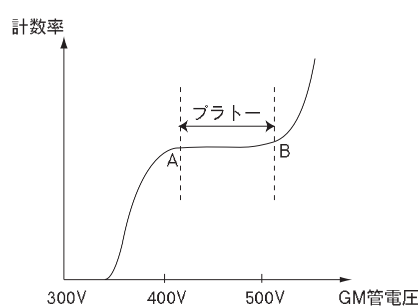


図 2.6: プラトー曲線

D　計数値の補正

1. バックグラウンド (Background)

   自然放射線（58 ページ）のために、放射線源を計数管に近づけないときでも、計数管は自然放射線を計測してしまう。よって、放射線源をもちいた測定結果から自然放射線による計測数を差し引く必要がある。いま、測定時間が T_b で、自然放射線による計測数が N_b であったとする。つぎに放射線源を置いた場合、測定時間が T_c で、N_c の計測数が得られたとする。それぞれに対する計数率は $n_b = N_b/T_b$, $n_c = N_c/T_c$ であるから、放射線源による真の計数率は $n_s = n_c - n_b$ となる。このとき、n_s に対する標準偏差 σ_s は、

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{N_c}{{T_c}^2} + \frac{N_b}{{T_b}^2}} \tag{2.9}$$

   と表わされる。したがって、放射線源固有の計数率は

$$\frac{N_c}{T_c} - \frac{N_b}{T_b} \pm \sqrt{\frac{N_c}{{T_c}^2} + \frac{N_b}{{T_b}^2}} \tag{2.10}$$

   となることが分かる。（12 ページ、間接測定値の誤差を参照せよ。）

2. 不感時間の補正

計数管に一度放射線が入射すると、計数管内部ではガス放電が起こり、そのままでは次に入射してくる放射線を測定できない。このため放電によるイオンや電子を全部取り除くように、計数管には消滅ガスが入れられている。したがって、新たに放射線 (荷電粒子) を測定するには多少の時間がかかる。この時間を不感時間と呼び T_D で表わす。

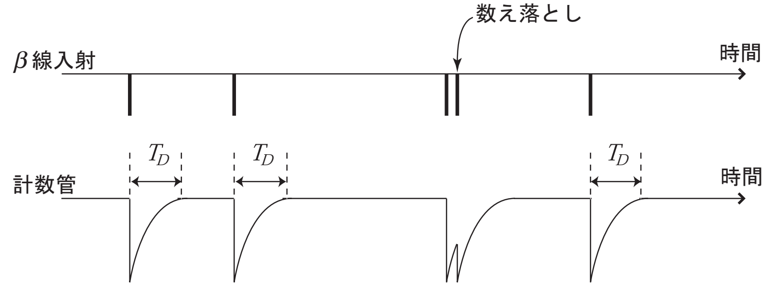


図 2.7: 不感時間と数え落とし

不感時間内に新たに放射線が入射しても、計数装置はこの放射線を計数することができない。したがって、測定された計測数は本当の放射線の数とは一致せず、補正をする必要がある。

単位時間に測定された放射線の数を n とすると、放射線を計測できない時間は nT_D である。単位時間に実際に入射した放射線数を n' とすると、

数え落される数は $n'nT_D$ となるので

$$n' - n = n'nT_D \tag{2.11}$$

の関係が成り立つ。変形すると

$$n' = \frac{n}{1 - nT_D} \tag{2.12}$$

が得られる。

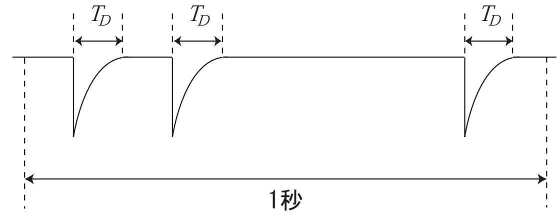


図 2.8: 不感時間の補正

3. 幾何学的計数効率

放射線は線源から等方的に放出されているため、G-M 管で捉えられるのは線源より放出されている放射線の一部でしかない。線源から絞り孔までの距離を R とすると、放射線は球の表面積 $4\pi R^2$ に一様にばらまかれる。G-M 管の入口で切り取られる球表面の面積を S とすると、計測することができる割合は、入口の面積と球の表面積の比

$$G = \frac{S}{4\pi R^2} \tag{2.13}$$

となる。この割合 G を幾何学的計数効率とよぶ。

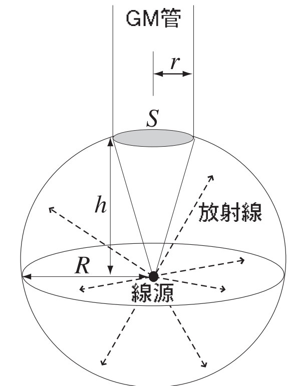


図 2.9: 幾何学的計数効率

また、G-M 管の半径を r、線源から G-M 管までの距離を h とすると

$$G = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right) \tag{2.14}$$

と書くことができる。

4. 後方散乱についての補正

　G-M 管の方向とは逆向きに放出された放射線が、線源を覆う物質や支持台、空気などの後方物質の原子で何度も散乱されることにより 90° 以上曲げられて、結局 G-M 管に入射することがある。この現象を後方散乱という。後方散乱があるときの計数率とないときの計数率の比のことを後方散乱因子と呼び、f_B で表わす。f_B は後方物質の厚さや原子番号、放射線の種類やエネルギーなどにより決まる。

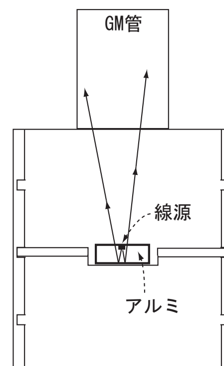


図 2.10: 後方散乱

5. 物質による放射線吸収についての補正

　放射線は G-M 管に入射する前に、線源を覆った物質や線源と G-M 管の間の空気によって、吸収されている。このため補正が必要である。

[測定]

A　バックグラウンド

1. G-M 管の印加電圧を 450 V にする。
2. バックグラウンドを $T_b = 10$ 分計数し、その計測数 N_b から計数率 n_b およびその誤差を求める。

B　計数の統計誤差

1. 使用する放射線源の番号を記録する。(各々の線源は強度が異なるため、実験を繰り返す際は同一の線源を使用する。)
2. 棚を G-M 管の窓より 30 mm の位置にする。放射線源を、棚の中心に薄膜の方を上にして置く。
3. 1 秒間での計測数を 100 回測定する。
4. 階級の幅を 10 個/秒として度数分布表を作成する。データ処理は表計算ソフトを用いて行なうこと。20 ページの「表計算の演算と関数」にある **COUNTIF** という関数を用いるとよい。たとえば、計測数が 290 から 299 までの度数を調べるには

   = COUNTIF(A1:A100, ”>= 290”)−COUNTIF(A1:A100, ”>= 300”)

   とすればよい。数式をひとつだけ入力して以下は自動入力にしたければ、表計算ソフトの機能「$」（19 ページ）や「&」（20 ページ）を活用するとよい。また、曲線と棒が混じったグラフを作る方法は 24 ページに解説がある。

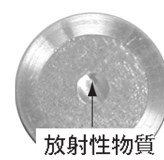


図 2.11: 線源

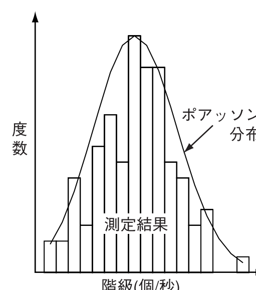


図 2.12: 度数分布

5. それぞれの階級値に対応するポアッソン分布の値 $P(N)$ を求める。ポアッソン分布を計算するには、20 ページの「表計算の演算と関数」にある **POISSON**(Windows7), **POISSON2**(Windows2000) という関数を用いるとよい。

   ポアッソン分布（式 (2.8), 61 ページ）では、N についての総和が 1 になるので、ここで得られた $P(N)$ は 1 より小さい数になっている。よって、度数の最大値と $P(N)$ の最大値が一致するように、$P(N)$ 全体に適切な係数を掛けて比較する。

6. 度数分布表から縦軸を度数、横軸を階級値として図 2.12 のようにグラフを作成する。また、グラフにポアッソン分布を重ねて描く。

7. 度数分布表およびグラフから、計測数がポアソン分布に従うことを確認する。また、(平均値)±(標準偏差) の間に測定した回数の約 68 %が入っていることを確かめる。

C　不感時間の測定

不感時間 T_D を求める方法として、二線源法がある。この方法では、強度がほぼ等しい同種の放射線源を 2 つ用いて測定をおこなう。図 2.13 に示したように、まず 1 番目の線源のみで測定をおこない計数率 n_1 を得たとする。次に、両方の線源を置いて測定した結果が n_{12}、最後に 2 番目の線源のみにして測定をし、計数率が n_2 になったとする。

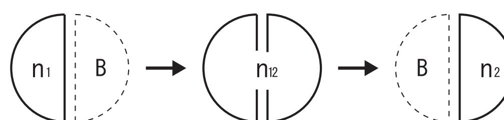


図 2.13: 二線源法

バックグラウンドについての計数率を n_b とすると、G-M 管に入射する放射線がすべて計測されるならば

$$(n_1 - n_b) + (n_2 - n_b) = n_{12} - n_b \tag{2.15}$$

が成立するはずである。しかし、実際には G-M 管の不感時間のために数え落しが生じる。両方の線源を置いて測定する場合は、放射線強度が大きいので不感時間に放射線が入射する確率が大きくなる。したがって、

$$(n_1 - n_b) + (n_2 - n_b) > n_{12} - n_b \tag{2.16}$$

という関係をもつことになる。この現象を利用すれば不感時間を求めることができる。

計数率に対する不感時間の補正は、63 ページの式 (2.12) を用いておこなうことができる。それぞれの測定で得られた計数率 n_1, n_2, n_{12}, n_b と、実際に入射した放射線数 $n'_1, n'_2, n'_{12}, n'_b$ の間には

$$\begin{aligned} n'_1 &= \frac{n_1}{1 - n_1 T_D}, \qquad n'_2 = \frac{n_2}{1 - n_2 T_D}, \\ n'_{12} &= \frac{n_{12}}{1 - n_{12} T_D}, \qquad n'_b = \frac{n_b}{1 - n_b T_D} \end{aligned} \tag{2.17}$$

という関係がある。今、$n_x T_D \ll 1 (x = 1, 2, 12, b)$ のはずなので、$1/(1-\Delta) \cong 1+\Delta$ という近似式を使うと、

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_1(1+n_1T_D), \qquad n'_2 = n_2(1+n_2T_D), \\ n'_{12} &= n_{12}(1+n_{12}T_D), \qquad n'_b = n_b(1+n_bT_D) \cong n_b \end{aligned} \tag{2.18}$$

のように表すことができる。実際に線源から出ている放射線の数は不感時間とは無関係なので

$$(n'_1 - n'_b) + (n'_2 - n'_b) = (n'_{12} - n'_b) \tag{2.19}$$

が成立する。式 (2.18) を式 (2.19) に代入すると、不感時間 T_D を

$$T_D = \frac{n_1 + n_2 - n_{12} - n_b}{{n_{12}}^2 - {n_1}^2 - {n_2}^2} \tag{2.20}$$

のようにして求めることができる。

式 (2.20) を用いて不感時間をもとめる場合の誤差について考える。式 (2.20) の分母、分子を

$$a = {n_{12}}^2 - {n_1}^2 - {n_2}^2, \qquad b = n_1 + n_2 - n_{12} - n_b \tag{2.21}$$

と書いておくと、式 (2.20) を微分した結果は

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_D}{\partial n_1} &= \frac{1}{a} + \frac{2b}{a^2}n_1 \cong \frac{1}{a}, \qquad \frac{\partial T_D}{\partial n_2} = \frac{1}{a} + \frac{2b}{a^2}n_2 \cong \frac{1}{a}, \\ \frac{\partial T_D}{\partial n_{12}} &= -\left(\frac{1}{a} + \frac{2b}{a^2}n_{12}\right) \cong -\frac{1}{a}, \qquad \frac{\partial T_D}{\partial n_b} = -\frac{1}{a} \end{aligned} \tag{2.22}$$

となる。これらの式を

$$\frac{\sigma_{T_D}}{T_D} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{T_D}\frac{\partial T_D}{\partial n_1}\right)^2\left(\frac{\sigma_{n_1}}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{T_D}\frac{\partial T_D}{\partial n_2}\right)^2\left(\frac{\sigma_{n_2}}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{n_{12}}{T_D}\frac{\partial T_D}{\partial n_{12}}\right)^2\left(\frac{\sigma_{n_{12}}}{n_{12}}\right)^2 + \left(\frac{n_b}{T_D}\frac{\partial T_D}{\partial n_b}\right)^2\left(\frac{\sigma_{n_b}}{n_b}\right)^2} \tag{2.23}$$

に代入することにより、不感時間の誤差 σ_{T_D} が求められる。ここで、

$$n_1 = \frac{N_1}{T_1}, \qquad n_2 = \frac{N_2}{T_2}, \qquad n_{12} = \frac{N_{12}}{T_{12}}, \qquad n_b = \frac{N_b}{T_b} \tag{2.24}$$

$$\sigma_{n_1} = \frac{\sqrt{N_1}}{T_1}, \qquad \sigma_{n_2} = \frac{\sqrt{N_2}}{T_2}, \qquad \sigma_{n_{12}} = \frac{\sqrt{N_{12}}}{T_{12}}, \qquad \sigma_{n_b} = \frac{\sqrt{N_b}}{T_b} \tag{2.25}$$

である。尚、実際に数値を代入する際には、式 (2.22) の微分係数がすべて $1/a$ と近似できることを用いると簡便である。

1. 使用する放射線源の番号を記録する。

   半月型線源を使用する場合

   赤または青で SR-90 などと印字してあるプラスチックの中に線源が密封されている。黒で B と印字してあるものには、線源は埋め込まれていない。

   丸線源を使用する場合

   隣のグループの丸型線源を借りて使用する。

2. 図 2.14 のように線源を棚板に設置する。
3. 棚板は G-M 管の窓より 30mm の位置に棚を設置する。
4. G-M 管の印加電圧を 450V にする。

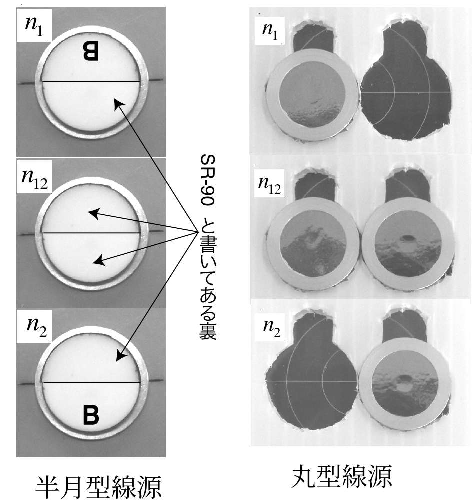


図 2.14: 線源

5. 図 2.14 の「n_1」の設定で 10 分間測定する。このときの計数率を n_1 とする。

半月線源を使用する場合の注意

・線源が密封された半月板は印字面を下向きにして棚に置くこと。

・２つの半月板の境界線が、棚に書いてある黒線に合うように棚に置くこと。

6. 図 2.14 の「n_{12}」の設定で 10 分間測定する。このときの計数率を n_{12} とする。

半月線源を使用する場合の注意

・半月板を取替える際は、取替えない方の半月板の位置が動かないようにする。

・半月板の交換の際に、棚の手前と奥が入れ替わらないよう留意する。

7. 図 2.14 の「n_2」の設定で 10 分間測定する。このときの計数率を n_2 とする。

8. 不感時間とその誤差を求める。不感時間が正の値となっており、誤差が不感時間より小さくなっているか確認する。

9. 測定が不十分な結果をなった場合は、誤差の評価から必要な測定時間を決定し、追加測定を行なう。

   線源が動かないように留意し、必要な測定時間をもう一度連続して測定するのがよい。

D　吸収係数の測定（60 ページを参照せよ。）

1. 使用する放射線源の番号を記録する。(各々の線源は強度が異なるため、実験を繰り返す時に同一の線源を使用する。)

2. G-M 管の印加電圧を 450V にする。

3. G-M 計数管の窓より 60mm の位置に棚をセットする。放射線源を、棚の中心に薄膜の方を上にして置く。

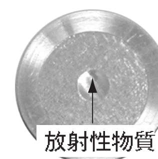


図 2.15: 線源

4. 線源の上に何も置かずに 適切な時間 測定する。「適切な時間」は、なぜそれが適切なのかを明確にして考察すること。

5. アルミニウム板をマイクロメーターで測定する。マイクロメーターで測定する際は、右端の小さなつまみを軽く回し、大きな力を加え過ぎないように十分に留意する。詳細は p.26 を参照。

   厚さが 0.1 mm から 3 mm の範囲となるような、5 ∼ 6 種類の組み合わせを決める。

6. アルミ板を放射線源の上に置く。放射線源の薄膜を傷つけないように注意して置くこと。各組み合わせについて、それぞれ適切な時間ずつ計数する。以下その計測数を N_c 計数率を n_c と記す。

7. 片対数グラフに、縦軸に $n_c - n_b$ (n_c , n_b には不感時間 T_D の補正を行ったものを用いる。T_D の誤差を考える必要はない。)、横軸にアルミ板の厚さ（単位面積あたりの質量）をとり、吸収曲線を描く。

   (注) β 線の吸収曲線は、物質の単位面積あたりの質量 (cm × 密度 = cm $\times \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ = g/cm^2) で表すと物質の種類によらず、だいたい一定になることが知られている。したがって、アルミニウムの密度 2.7 g/cm^3 を用いて、横軸の厚さ d は mg/cm^2 の単位で表す。

8. アルミ板の厚みが小さい領域では、ほぼ指数関数的に振舞うことを理解する (片対数グラフでは直線となる)。つまり、厚さ d がゼロのときの計数率を a とすると

$$n_c - n_b = ae^{-\mu d}$$

となる。グラフより吸収係数 μ を求めよ。吸収係数 μ の単位を確認しておくこと。

9. 線源と G-M 管 の間には空気があり、G-M 管の入口には雲母が取り付けられており、また、線源は薄いアルミ箔でおおわれている。したがって、放射線はこれらの物質でも吸収されるので、補正をおこなう必要がある。線源と G-M 管の距離は $h = 6$ cm より空気の密度 1.2 mg/cm^3 を用いて、7.2 mg/cm^2 となる。また、G-M 管の雲母は 3 mg/cm^2、線源のアルミ箔は 2 mg/cm^2 である。これらの物質による吸収を考慮する必要があるので、D-7 で求めた吸収曲線を左方に 12.2 mg/cm^2 だけ延ばし (これを "外挿" という)、外挿計数率 n_0 (個/分) を求める。

10. G-M 管の直径は 0.9 cm である。63 ページの式 (2.14) から幾何学的係数効率 G をもとめよ。

11. 試料の放射線強度 D は

$$D = \frac{n_0}{G \cdot f_B} \tag{2.26}$$

より求まる。後方散乱率 f_B は、$f_B = 1.5$ とする。

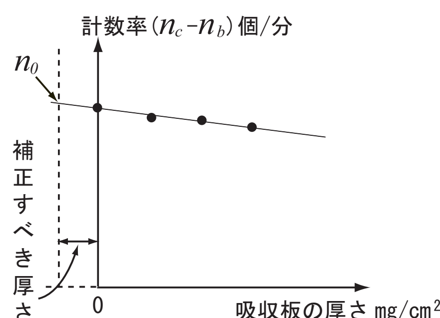


図 2.16: 吸収板の厚さと計数率

E 生体物質による放射線の吸収

1. 牛骨の切片（人の骨の代わりに使う）を 1 枚から 3 枚まで重ねて放射線源の上に置き、骨による放射線吸収の測定を行なう。各骨切片には × 印が付けてある。この印が放射線源の中央となるように骨切片の置き方に注意する。また、骨切片は場所によって厚さが異なるので、× 印の位置について厚さを測定すること。

2. ハム（筋肉組織の代わりに使う）を適当な大きさに切る。放射線源の上に食品ラップをおいて、その上にハムを 1 枚から 3 枚まで重ねて置く。ハムによる放射線吸収の測定を行なう。

   [注意] ハムが乾燥すると密度が変化し、測定結果の評価が困難となる。短時間で手際よく測定すること。

3. 牛骨とハムによる結果を、アルミ板を用いて作った吸収曲線のグラフに重ねて描く。

   骨の密度は 1.8 g/cm^3 でハムの密度は 1.1 g/cm^3 である。

4. 測定が終了したら HV ADJ を反時計方向いっぱいにまわし、OFF にしたのちプラグをぬく。

[課題]

1. ポアッソン分布に関して (61 ページ)、式 (2.7) を導出せよ。
2. バックグラウンドの補正に関して (62 ページ)、「測定値とその取り扱い」の式 (42) (13 ページ) を用いて、式 (2.9) を導出せよ。
3. 幾何学的計数効率に関して (63 ページ)、式 (2.14) を導出せよ。球座標を用いた積分をおこなえばよい。（付録 N, 101 ページ参照）
4. [バックグラウンド] の結果を報告せよ。
5. [計数の統計誤差] の結果を報告せよ。
6. [不感時間の測定] の結果を報告せよ。不感時間 T_D の結果を 有効数字 に注意してまとめる。11∼12 ページ参照のこと。
7. [吸収係数の測定] の結果を報告せよ（単位を明確にしておくこと）。
8. [生体物質による放射線の吸収] の結果を報告せよ。

[参考書]

1. 三浦、管、保野 著 「放射線計測学」（裳華房）
2. 小川岩雄 著 「放射線」(コロナ社)
3. N.C. バーフォード 著、酒井英行 訳 「実験精度と誤差」(丸善)

3　ヤング率の測定

[目的]

一般に固体に外力を加えるとひずみが生じ、もとにもどろうとする力、応力が生ずる。応力およびひずみが小さい場合はこれらの量はフックの法則に従う。

（応力）＝（弾性定数）×（ひずみ）

特に伸縮に関するときの弾性定数をヤング率という。この実験では、金属棒のヤング率を測定し、弾性率の数値に親しみを持つと共に、ノギス、マイクロメーターなど長さの精密測定用器具を利用した測定法に習熟し、測定結果の精度の評価をすることが主な目的である。

[解説]

A　ヤング率

多くの固体では、物質を構成する原子・分子が規則正しく配列している。このような秩序を維持しているのは分子間力である。分子間力は、図 3.1 のように分子の中心からある距離 x_0 の位置で力の大きさがゼロとなり、x_0 より近付くと急激に斥力が増大してそれ以上近付くことを許さない。他方、x_0 より遠方では引力が働くが、その大きさは緩やかに減少していく。物質中の原子・分子は隣り合う原子・分子と距離 x_0 離れて位置している。距離が x_0 より大きくなると近付こうとする力（引力）が働き、距離が x_0 より小さくなると離れようとする力（斥力）が働くことが分かる。原子・分子間距離 x が x_0 からわずかにずれているとき、分子間力 $f_B(x)$ は

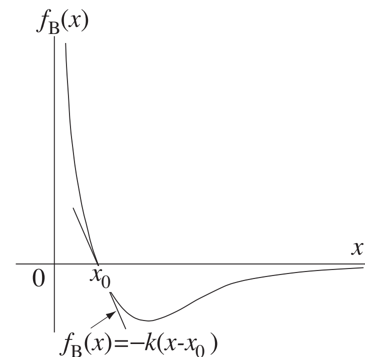


図 3.1: 分子間力

$$f_B(x) \cong -k(x - x_0) = -k\Delta x \tag{3.1}$$

と近似することができる。ここで k は定数であり、$\Delta x = x - x_0$ とおいた。

さて、いま長さ ℓ 、断面積 S の細長い直方体の棒があり、その両端に力 F がかけられた結果、全体で $\Delta\ell$ だけ伸びを生じてつり合ったとしよう（図 3.2)。この状態をミクロに見れば、図 3.3 に示したように、個々の分子間距離が Δx だけ伸びたものと考えられる。単位長さあたりの分子の数を n とすると、長さ ℓ の棒には $n\ell$ 個の分子が並んでいるので、棒全体での伸びは

$$\Delta\ell = n\ell\Delta x \tag{3.2}$$

と表される。他方、断面内に並んでいる分子の数は n^2S であるから、断面全体に働いている力は、個々の分子からの力の和として

$$F = -n^2 S f_B(x_0 + \Delta x) \tag{3.3}$$

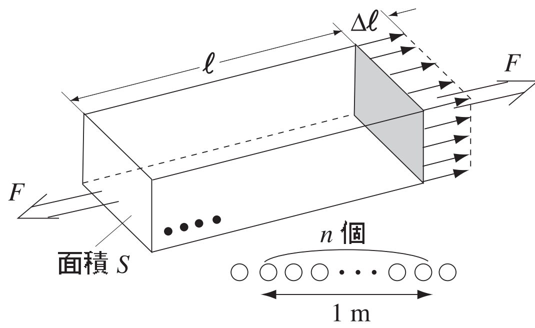


図 3.2: 棒の伸長

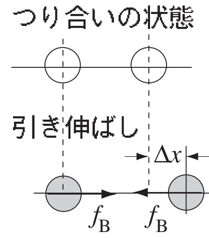


図 3.3: ミクロ弾性

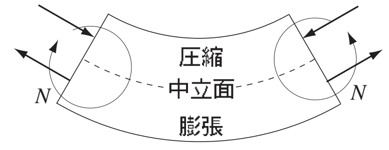


図 3.4: 棒の曲げ

と表される。式 (3.1)∼(3.3) より

$$F = -n^2 S f_B(x_0 + \Delta x) = n^2 Sk\Delta x = n^2 Sk\frac{\Delta\ell}{n\ell} = nSk\frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{3.4}$$

すなわち

$$\frac{F}{S} = nk\frac{\Delta\ell}{\ell} = E\frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{3.5}$$

を得る。ここで $E = nk$ は物質固有の定数で、**ヤング率** と呼ばれている。また、一般に F/S のように単位面積あたりに働く力を **応力** と呼ぶ。特に、面に垂直で押す方向の応力は圧力、引く方向の応力は張力と言うことがある。

B　棒に働く力のモーメントと曲げ

図 3.4 のように真直な弾性体の棒を平面内で曲げる場合を考えてみよう。棒は外側では引き延ばされ内側では圧縮されるから、その中間に伸び縮みのない面が生じている。これを **中立面** を呼ぶ。太さや材質の一様な棒がわずかに曲げられる場合には、図 3.5(a) のように棒の形は円弧で近似できるので、中立面の半径を R、その面を基準として外側に測った距離が z の場所での伸びの割合は

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{(R+z)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{z}{R} \tag{3.6}$$

となる。ただし、θ は円弧状に曲がった棒の張る中心角である。図 3.5(b) のように棒の断面を見てみると、中立面より内側の断面には押す方向の応力が働いており、中立面より外側の断面には引く方向の応力が働いていることが分かる。したがって、中立面から外側へ距離 z の位置に働く応力 $f(z)$ はヤング率を E として

$$f(z) = E\frac{\Delta\ell}{\ell} = E\frac{z}{R} \tag{3.7}$$

となる。応力は単位面積あたりに働く力なので、距離 z の位置の微小面積 $\Delta y\Delta z$（図 3.5(c) の 灰色の部分) に働く力は $f(z)\Delta y\Delta z$ である。

棒を曲げるためには、棒の断面に力のモーメントを与える必要がある。図 3.5(c) の 灰色の部分に働く力は図 3.5 に示した回転の中心について、力のモーメント

$$\Delta N = z \times (f(z)\Delta y\Delta z) \tag{3.8}$$

を生じさせている。これを棒の断面全体にわたって積分すれば、棒を曲げるのに必要な力のモーメント N が得られ

$$N = \int dN = \frac{E}{R}\iint_{\text{断面全体}} z^2 dydz = \frac{E}{R}I \qquad (3.9)$$

となる。ここで I は **断面の幾何学的慣性モーメント** と呼ばれ

$$I = \iint_{\text{断面全体}} z^2 dydz \qquad (3.10)$$

と定義される。剛体の回転における慣性モーメントとは次元も物理的な意味も異なるが、曲げにくさ（これも慣性の一種）を表すので、このような名前が付けられている。

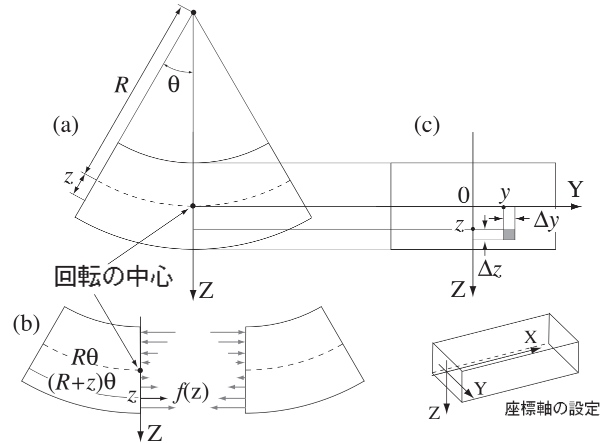


図 3.5: 棒の曲げと応力

C　棒のたわみ

棒の両端を支えて中央におもりをかけたときの変形（たわみ）を考えてみよう。棒の長さを ℓ、おもりの質量を M とする。図 3.6 のように、はじめに棒の置かれていた面内に X 軸を、これと垂直で下向きに Z 軸を選び、左の支えの場所を原点とする。曲がった棒の形が関数 $z = u(x)$ で表されるとすると、曲がった棒に接する円の半径 R とは

$$R = \frac{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}{|u''(x)|} \simeq \frac{1}{|u''(x)|} \qquad (3.11)$$

の関係がある。この R は **曲率半径** と呼ばれる。詳しい証明は 付録 K (96 ページ) を見よ。棒のたわみが微小なときは、$u'(x) << 1$ の関係があるので式 (3.11) のように近似することができる。

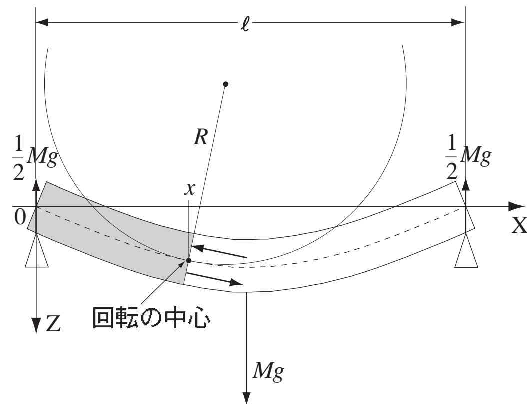


図 3.6: 棒の曲げ

曲がった棒は全体が静止しているので、力のベクトルと力のモーメントがつり合っている。このつり合いは、棒のどのような部分をとっても成立しているはずなので、図 3.6 に示した灰色の部分について力のモーメントのつり合いを調べてみる。灰色の部分に働いている力は、支えから押される力 $Mg/2$ と棒の断面に働く応力である。したがって、図 3.6 のように回転の中心を中立面の位置に設定すると、力のモーメントは

$$N - \frac{Mg}{2}x = 0 \qquad (3.12)$$

というつり合いの条件を満たす。ここで、力のモーメントの向きは反時計回りを正の向きとした。また、N は断面に働く応力が作る力のモーメントで式 (3.9) で与えられる。曲率半径は式 (3.11) を用いて計算できる。いま、$u''(x) < 0$ なので、式 (3.12) から

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{Mg}{2IE}x \tag{3.13}$$

という関係を導くことができる。支えの位置では棒は動いていないので

$$u(0) = 0, \tag{3.14}$$

また、棒の中央付近は X 軸と平行になっているので

$$u'(\ell/2) = 0 \tag{3.15}$$

という条件がある。これら 2 つ条件のもとで式 (3.13) の微分方程式を解くと

$$u(x) = -\frac{Mg}{12IE}x^3 + \frac{Mg}{16IE}\ell^2 x \tag{3.16}$$

となることが分かる。これから、棒中央のたわみによる降下は

$$Z = u(\ell/2) = \frac{Mg\ell^3}{48IE} \tag{3.17}$$

となる。棒の断面が厚さ（Z 方向）a、幅（Y 方向）b の矩形であるときには、式 (3.10) の幾何学的慣性モーメントは $I = a^3b/12$ となるから、これを式 (3.17) に代入すると

$$Z = \frac{Mg\ell^3}{4a^3bE} \tag{3.18}$$

となり、これから

$$E = \frac{Mg\ell^3}{4a^3bZ} \tag{3.19}$$

とヤング率を求めるための関係式を得る。

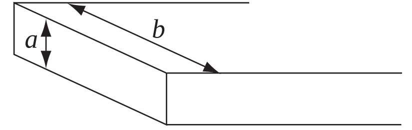


図 3.7: 棒の厚さと幅

[測定]

1. 7 個のおもりの質量 M を個別に電子てんびんで測定し、平均値と誤差を求める。（電子てんびんは 1 台しかないので、込み合っているときは、測定を先の項目に進めること。）

2. 巻尺を用いて、支持台のエッジ間距離 ℓ を、測定場所を変えて 3 箇所測定し、平均値と誤差を求める。

3. マイクロメータを用いて、2 本の試料棒について、それぞれ、厚さ a と幅 b を、測定場所を変えて 3 箇所測定し、平均値と誤差を求める。

4. それぞれの試験棒について、おもり 1 個分のたわみ Z を以下のように測定する。

4.1 図 3.9 はユーイングの装置の説明である。この図を参考にし、試験棒 AB の中点 O におもり M をつるす。

4.2 ダイヤルゲージを支柱に固定している蝶形固定ネジをゆるめ、ダイヤルゲージを除々に下げ、コ形エッジの穴にダイヤルゲージの先端（測定子）を入れる。ダイヤルゲージの先端（測定子）が試験棒に接触した後も下げ、ダイヤルゲージの短針（図 3.8) が 5 の目盛付近になったところで、蝶形固定ネジを締めダイヤルゲージを固定する。
<u>ダイヤルゲージを試料棒に押しつけすぎてはいけない。器機の故障の原因となることに加えて、そもそも、測定ができない。</u>

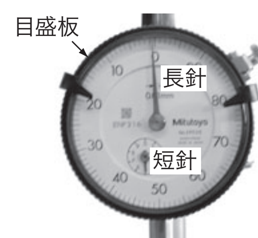


図 3.8: ダイヤルゲージ

4.3 ダイヤルゲージの目盛板を回し、零点を調節する。なお、測定子の先端の位置が 0.01 mm 変化するのに対応して、ダイヤルゲージの長針は 1 目盛分回転する。

4.4 初め、おもりを 1 個掛けておいて尺度上の原点 Z_0 を定め、さらにおもりを 1 個ずつ増したときの読みを $Z_1, Z_2 \cdots\cdots Z_6$ とする。

4.5 次におもりを 1 個ずつ減らしたときの読みを $Z_5', Z_4' \cdots\cdots Z_0'$ とする。

4.6 測定 4.4 と 4.5 の結果から平均のたわみ $\bar{Z}_0 = \frac{1}{2}(Z_0 + Z_0'), \bar{Z}_1, \cdots \bar{Z}_5$ を求める。

4.7 15 ページの「周期量の平均値」を参考にして、おもり 1 個分のたわみ

$$\frac{1}{3}\left(\bar{Z}_3 - \bar{Z}_0\right), \quad \frac{1}{3}\left(\bar{Z}_4 - \bar{Z}_1\right), \quad \frac{1}{3}\left(\bar{Z}_5 - \bar{Z}_2\right)$$

を求める。したがって、1 度の測定において、たわみ Z のデータが 3 つ得られることになる。

4.8 Z についての 3 つのデータから、たわみの平均値と誤差を求める。

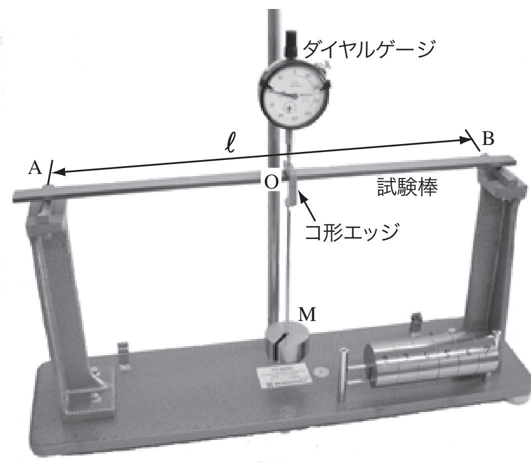


図 3.9: ユーイングの装置

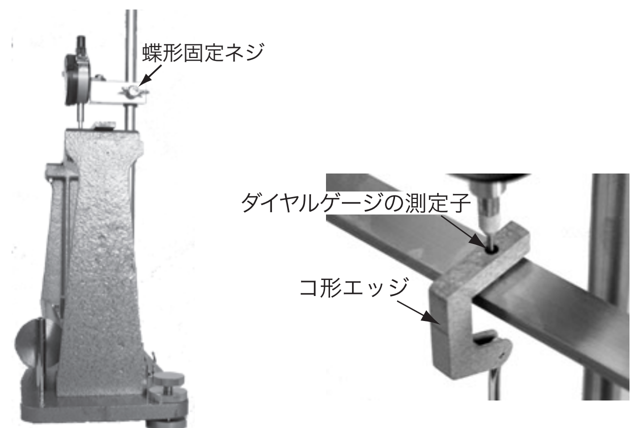


図 3.10: コ形エッジ

[課題]

1. ヤング率 E についての平均値の平均二乗誤差 s_E が

$$\frac{s_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{s_M}{M}\right)^2 + \left(3\frac{s_\ell}{\ell}\right)^2 + \left(3\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_Z}{Z}\right)^2 + \left(\frac{s_g}{g}\right)^2} \tag{3.20}$$

で与えられることを確認せよ。「測定値とその取り扱い」を参照のこと。

2. ヤング率のデータ処理をおこなうために、以下のような表を作成し、測定量を整理せよ。

	M (単位)	ℓ(単位)	a(単位)	b(単位)	Z(単位)
測定装置					
測定量の平均値					
測定量の誤差					
測定量の相対誤差					
s_E/E に対する影響					

3. さまざまな量の実測値を 式 (3.19) に代入して、それぞれの試験棒について、ヤング率の平均値 E と誤差 s_E を求めよ。（式 3.20 を参照せよ。）重力定数 g については、理科年表より

$$g = 9.7983819\mathrm{m/s^2} \quad (\text{福井})$$

のように、十分な精度で分かっているものとし、必要な桁数を計算に用いるものとする。

4. それぞれの試験棒について、ヤング率の結果を、有効数字に注意して、誤差をつけてまとめよ。（11∼12 ページ参照のこと）

[**参考書**]

1. 戸田 盛和 著 「理科教養の物理学」 第 2 章 §5

2. 原島 鮮 著　「基礎物理学」 第 6 章

3. 金原 寿朗 著　「基礎物理学 上」 第 6 章

4. ベネティック、ビラース 著「医系の物理 a 力学 上」 第 3 章 3-4

5. ケイン、スターンハイム 著 「ライフサイエンス物理学」 9 章

4　分光器

[目的]

光が放出・吸収される過程は、対象物の詳細な情報を担っている。波長やエネルギーなど光の性質を分析し、物質と光のかかわりを解明することを**分光**という。

この実験においては、いくつかの原子が出す光をプリズム型分光器で観測することによって分光器の構造を理解し、その取り扱いに習熟するとともに、原子からの光放出過程を理解することを目的とする。

[解説]

A　光の波動性

光は電磁波としての性質を持っており、真空中を $\mathbf{c = 2.99792458 \times 10^8}$ **m/s** の速さで伝搬する。波の性質は**波長** λ [m] と**振動数** ν [Hz](Hz は 1/s と同じ）によって表すことができる。電磁波は波長ごとに、図 4.1 のように分類されている。人間の目で見ることができる電磁波は、波長が 360 nm~830nm 程度の範囲で、**可視光**と よばれる。

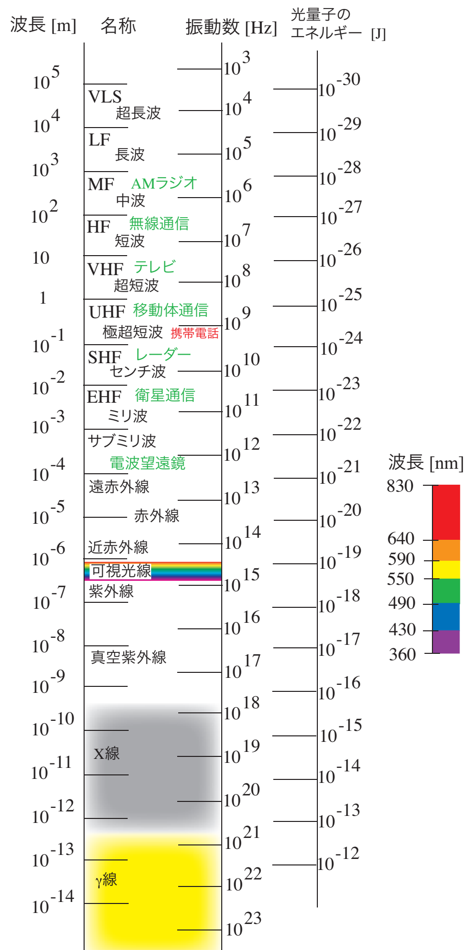


図 4.1: 電磁波

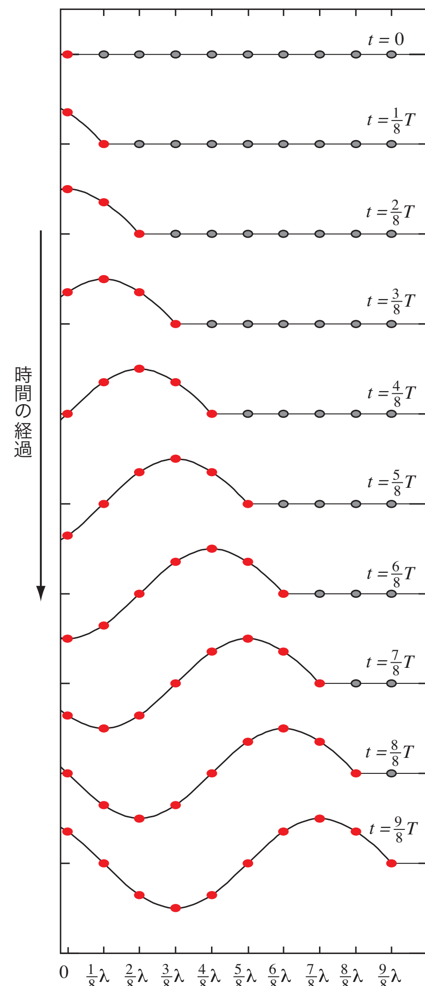


図 4.2: 波の伝搬

光が波の性質を持つことは、2つ穴のスリットに光を通すことで確認できる。光源から出た光は山谷がそろってスリットに到達する。2つの穴を結ぶ線の垂直二等分線とスクリーンの交点は、2つの穴から等距離にある。したがって、それぞれの穴を通過してくる光の波は山谷がそろい2つの光は強めあう。そこから左右にずれた点では、片方の波が山なら、他方は谷のように波が弱めあう点がある。さらにずれると、再び山谷がそろい光は強めあう。このような現象は**干渉**とよばれ、光が波の性質を持つことの証拠である。

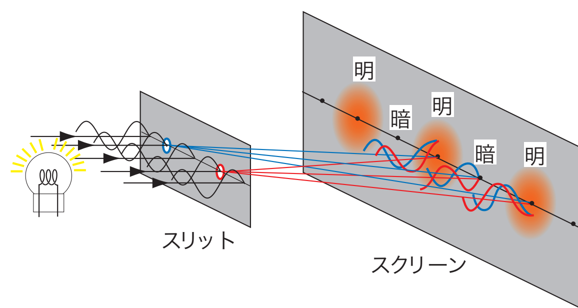


図 4.3: 光の干渉

波は空間に分布した単振動の集まりであると考えればよい。図 4.2 に示したように、波の先端は次の単振動を引き起こしながら進む。したがって、波が 1 波長分の距離 λ を進む時間は、波（あるいは単振動）の周期 T と等しい。振動数は周期の逆数 $(\nu = 1/T)$ なので、一般に波の速さ v は

$$v = \lambda \times \nu \tag{4.1}$$

と表すことができる。

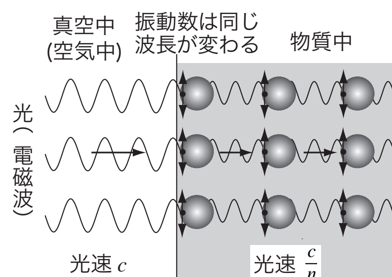


図 4.4: 物質中の電磁波

電磁波が物質に入ると、物質中の電子を振動させ、振動する電子は新たな電磁波を発生させる。これを繰り返しながら、電磁波は物質中を伝搬する。このため、電磁波の速さは真空中より遅くなる。物質中の光（電磁波）の速さ c' は、**屈折率** n という量をもちいて、

$$c' = \frac{c}{n} \tag{4.2}$$

と表す。したがって、真空の屈折率は $n = 1$ である。

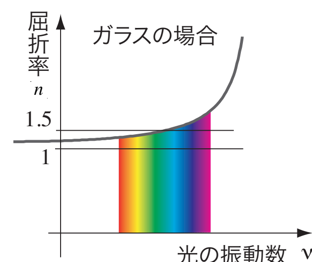


図 4.5: ガラスの屈折率

物質の密度が小さい空気などの気体中では、電磁波は物質の影響をほとんど受けずに伝搬するので、屈折率は $n \cong 1$ である。ガラスなどの場合、図 4.5 に示したように、屈折率は光の振動数（あるいは波長）とともに変化する。

図 4.4 のように、物質の境界面に対して垂直に入射した電磁波は、そのまま物質中を直進する。電磁波は物質中の電子を振動させるが、その電子の振動数は電磁波の振動数と同じである。したがって、電磁波は振動数を変えずに物質中を伝搬する。一方、物質中の電磁波の速さは (4.2) のように変化する。式 (4.1) から、速さの変化は波長の変化によるものであることがわかる。

次に、光が境界面に対して斜めに入射する場合を考える。図 4.6(a) のように、2つの波が平行で同じタイミングで、屈折率 n_1 の物質中を伝搬している。

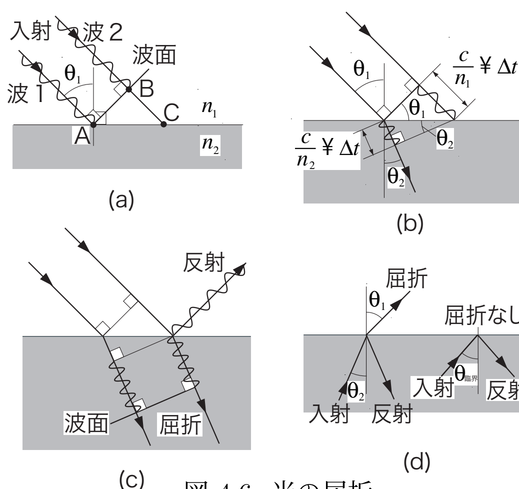


図 4.6: 光の屈折

２つの波は進行方向に対して同じ位置関係にあるはずなので、波の先頭（波面）は、進行方向に対して垂直である。波が、境界面の垂線と角度 θ_1 で入射すると、まず「波１」が境界面上の点 A に到達する。このとき、「波２」の先頭は点 B にある。その後、「波２」が境界面上の点 C に到達するまでの時間を Δt とすると、「波１」は屈折率 n_2 の物質中を距離

$$\frac{c}{n_2} \times \Delta t$$

だけ進むことになる。図 4.6(b) に示した瞬間の波面は、「波１」の進行方向に対して垂直で、点 C を通る直線となる。したがって、図中の２つの直角三角形の関係から

$$\frac{c\Delta t/n_2}{\sin\theta_2} = \frac{c\Delta t/n_1}{\sin\theta_1}$$

となる。したがって、入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 との間には、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.3}$$

図 4.7: プリズム

という関係が成立する。図 4.5 のように、屈折率が光の振動数（波長）によって変化する場合、光の色によって屈折角は異なる値となる。このような光の性質を利用したものが**プリズム**で、様々な「色」が混じり合った光を分けて観測することができる。

図 4.6(d) に示したように、光が屈折率 n_2 から n_1 に進んだ場合も、式 (4.3) の関係が成り立つ。屈折率が大きな物質から屈折率が小さな物質へと光が進む場合 ($n_2 > n_1$)、入射角 θ_2 が

$$\sin\theta_{臨界} = \frac{n_1}{n_2}$$

の条件を満す角度 $\theta_{臨界}$ で、屈折角が $\theta_1 = 90^\circ$ となる。入射角を $\theta_2 > \theta_{臨界}$ となるように選んでおけば、光は屈折率 n_2 の物質の外へは出ていかずに、すべて境界面で反射されることになる。このような状態は**全反射**とよばれ、光ファイバーでの情報伝達に利用されている。

B　光の粒子性

光はエネルギーを運ぶ。電球から出る光を考えると、電球を 2 個にすれば光のエネルギーも倍になる。どんな波長（色）の光でも、強い光にすればエネルギーを大きくすることができる。しかし、日常経験する現象には光のエネルギーについて不思議なことがある。

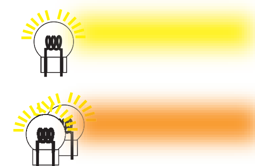


図 4.8: 光のエネルギー

> 冬の日にストーブを真赤になるほど燃やして、何時間当たっても顔は日焼けで黒くはならない。これに対し、夏の日に海岸で 5 分もさらされていると、ただちに日焼けしてしまう。

このことは、光のエネルギーは総量だけが問題ではないことを意味している。日焼けは、皮膚の中での紫外線による化学反応が原因であるが、ストーブから放射される赤外線ではこの化学反応は起きない。同じ強度の紫外線と赤外線が異なるエネルギーを持つとしても、強度を調節すれば同じエネルギーを持つようにできるはずである。しかし、いくら強度の大きな赤外線を使っても日焼けは起きないのである。

このような光の性質は、**光電効果**という現象で顕著に現れる。図 4.9 のように、金属に光を当てると金属内の電子が放出される。この過程は

- 光の振動数が一定の値 ν_0 より大きくなければ電子は放出されない。
- ν_0 より大きな振動数の光を当てれば、光が弱くても電子が飛び出してくる。
- 振動数が同じであれば、飛び出してくる電子の数は光の強さに比例する。

という特徴を持つ。

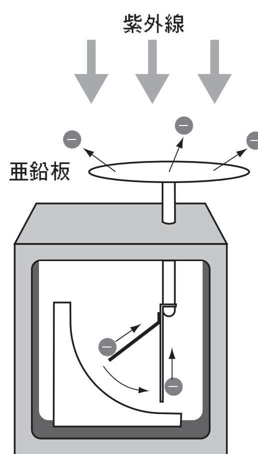


図 4.9: 光電効果の実験

図 4.10 に示したように、金属内の電子は、あたかも井戸の中に閉じ込められているようなもので、電子が外界へ出るためには最低限のエネルギー（束縛エネルギー W）が必要である。光がエネルギー E を金属にあたえると、電子は運動エネルギー

$$K = E - W$$

を持って飛び出してくる。1916 年のミリカンの実験は、様々な振動数の光を用いて、金属から飛び出してくる電子の運動エネルギーを測定した。図 4.11 が実験結果で、光が振動数に比例するエネルギー

$$E = h \times \nu \tag{4.4}$$

を持つことを明確に示した。ここで、比例定数 h は**プランク定数**とよばれ

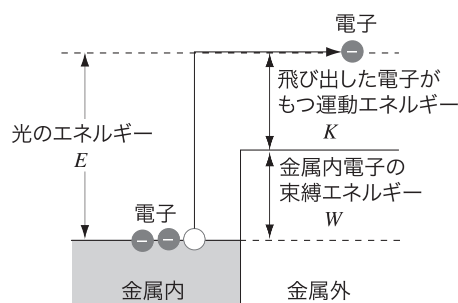


図 4.10: 光電効果

$$h = 6.6260693 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \tag{4.5}$$

という値であることが分かっている。

光は分割できないエネルギー（式 (4.4)）を持っていて、光と電子はエネルギーを「かたまり」としてやり取りする。このような「エネルギーのかたまり」は**光量子**とよばれる。光は波動としての性質だけでなく、光量子として粒子の性質もあわせ持つ存在である。

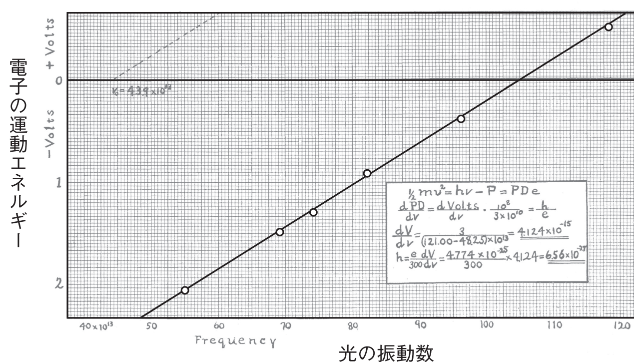


図 4.11: 光電効果の実験結果（ミリカンの論文より）

C　電子の波動性

電子は質量 9.109×10^{-31} kg, 電荷 -1.602×10^{-19} C を持つ粒子である。通常、光は波動の性質を示すが、時として光量子としての粒子の性質を表す。ならば、電子やその他の「粒子」も「波動」の性質を持つのではないかと考えることは、あながち無理ではないだろう。原子の構造を理解するためには、電子が持つ波の性質が不可欠である。20 世紀初頭から電子の波について理解が進み、ミクロの世界の物理法則は、粒子と波が混然一体となったものであることが明らかになった。この新しい物理法則は**量子力学**とよばれている。

日立製作所の外村彰 (1978 年) は、電子の波を実際に見ることができる装置を開発した（図 4.12）。電子源から放出された電子は、途中の電子用スリットを通過し、検出器で測定される。図 4.13 の白い点は 1 個の電子が検出器に到達した位置を表していて、a∼d は時間経過である。最初、電子は乱雑に検出器にやってくるように見えるが、時間が経つと縞模様が表れる。これは、光の干渉（図 4.3）と同じもので、電子が波の性質を持つことの証拠である。

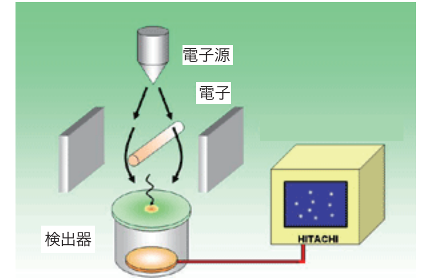


図 4.12: 電子による干渉の実験装置

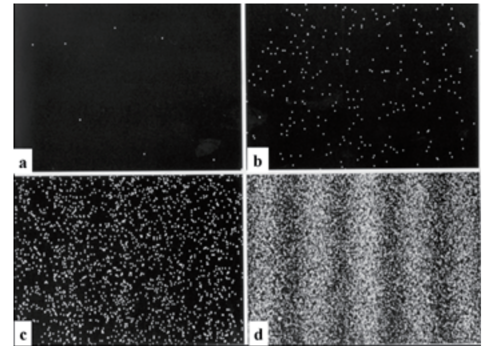


図 4.13: 電子による干渉の実験結果

このような波の性質は電子特有のものでなく、一般に粒子は波動の性質を合わせ持っており**物質波**とよばれる。質量 m の粒子が速さ v で運動しているとき、物質波の波長は

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{4.6}$$

であることがわかっている。ここで定数 h は式 (4.5) のプランク定数である。

物質波の波長についての解説

質量 m の物体が速さ v で運動しているとき、運動の激しさを表す量

$$P = mv \qquad (1)$$

を持つ。これは運動量とよばれ、運動エネルギーとは独立なものである。光も運動量 P を持ち、光のエネルギー E との間に

$$P = \frac{E}{c} \qquad (2)$$

という関係がある。これは、マックスウェル方程式から示すことができる。光量子のエネルギー E は、式 (4.4) のように振動数 ν との間に

$$E = h\nu \qquad (3)$$

という関係がある。光の振動数 ν は波長 λ を用いて $\nu = c/\lambda$ と書くことができるので、式 (2) と (3) から

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{P} \qquad (4)$$

であることがわかる。これは光についての関係であるが、「粒子の性質を持つ光」と「波動の性質を持つ粒子」は同等な存在であるとの信念（これは正しいことが確かめられている）に基づけば、式 (1) と (4) から、質量 m の物体が速さ v で運動しているとき、物体は波長

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

の物質波をともなうことになる。

D　水素原子

水素原子は電子と陽子からなる最も基本的な原子である。負の電荷 $(-e)$ を持つ電子と正の電荷 $(+e)$ を持つ陽子の間には、電気力が引力として働く。電子が半径 r の円軌道を速さ v でまわっているとすると、電子の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{4.7}$$

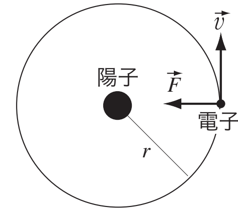


図 4.14: 水素原子

と書ける。電子は引力を受けるので、図 4.15 のように、陽子から距離 r の位置にある電子の位置エネルギーは

$$U(r) = U(\infty) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{4.8}$$

のように無限遠方での値 $U(\infty)$ より小さい。電子は速さ v で動いているので、運動エネルギー $mv^2/2$ を持ち、運動方程式（式 (4.7)）をもちいると、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{4.9}$$

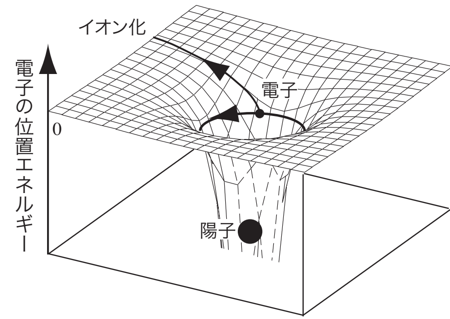


図 4.15: 電子の位置エネルギー

と表すことができる。したがって、原子内にいる電子は、位置エネルギー (式 (4.8)) と運動エネルギー (式 (4.10)) の合計

$$E(r) = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = U(\infty) - \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{4.10}$$

というエネルギーを持つことがわかる。

原子の世界では、電子の持つ波の性質が重要となる。図 4.16 に示したように、電子は波打ちながら円軌道をまわる。波がつながっていない場合（図 4.16 の中央）、円軌道上には山谷がつぎつぎにやってくることになり、波は弱めあって消えてしまう。このような場合、電子は安定に存在できない。したがって、原子内の電子軌道の周長 $2\pi r$ は、電子の波長 λ の正の整数倍でなければならない。この条件は**量子条件**とよばれ



図 4.16: 原子核の周囲をまわる電子

$$2\pi r = n \times \lambda \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.11}$$

となる。正の整数 n は**量子数**とよばれる。式 (4.9) をもちいると、半径 r の軌道をまわる電子の速さは

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}} \tag{4.12}$$

となる。また、電子の波長は式 (4.6) なので

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2 r}{me^2}} \tag{4.13}$$

となる。式 (4.11) と (4.13) から電子の軌道半径をもとめることができ

$$r = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi me^2} \times n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.14}$$

となり、量子数 n が大きくなるにしたがって、電子の軌道半径は大きくなることがわかる。電子の状態は量子数 n で分類される。古い表記では

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$\cdots$
K 殻	L 殻	M 殻	N 殻	O 殻	P 殻	Q 殻	$\cdots$

と名付けられている。

半径 r の軌道をまわる電子は式 (4.10) のエネルギーを持つ。電子の軌道は、式 (4.14) のような「とびとび」の半径のものしかない。したがって、式 (4.14) を (4.10) に代入すると、原子内の電子は「とびとび」のエネルギー

$$E_n = U(\infty) - \frac{me^4}{8h^2{\varepsilon_0}^2}\frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.15}$$

の状態しかとらないことがわかる。

通常、水素原子の電子は、最もエネルギーの小さな $n=1$ の状態にある。この電子に、外部から十分なエネルギーを与えると、電子はよりエネルギーの高い状態へ飛び移る。高いエネルギー状態の電子は、長くその状態に留まることはなく、より低いエネルギーの状態へと落ちていく。このとき、余剰となったエネルギーは、光として外部へ放出される。放出される光の振動数を ν とすると、光は式 (4.4) のエネルギー $h\nu$ を持つ。したがって、電子の状態が n_i から n_f $(n_i > n_f)$ へと変化するとき、エネルギー保存則

$$h\nu = E_{n_i} - E_{n_f} = \frac{me^4}{8h^2{\varepsilon_0}^2}\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right) \tag{4.16}$$

が成り立つ。2 つの電子の状態 n_i と n_f は、$n_i > n_f$ であるような、すべての組み合わせを取りうる。さまざまな電子の状態変化に際して放出される光のうち、可視光となるものは $n_f = 2$ への状態変化のみである。このような光は、発見者の名前からバルマー系列とよばれている。

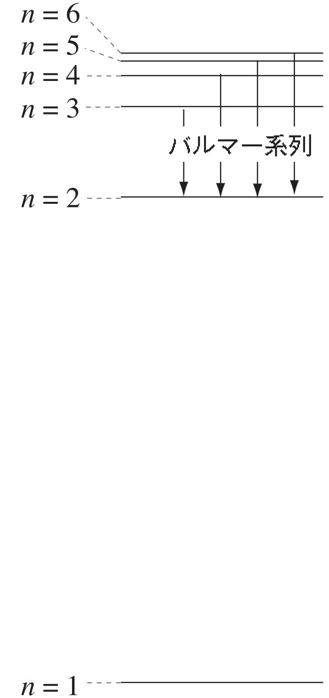


図 4.17: 水素原子のエネルギー準位

[測定装置]

A 分光器

プリズム型分光器の光学系は、図 4.18 に示すように、コリメータ C_O, プリズム P, 望遠鏡 T からなっている。光源からの光は、まずスリット S を通る。スリットはコリメーティングレンズ L_C の焦点に位置するので光は L_C によって平行光線となり、プリズムの入射面と出射面とで 2 度屈折される。このとき入射して来る平行光線が種々の波長の光線からなるものであると、プリズムを通過したのち、それぞれの波長に応じて多数の平行光線に分散して、それぞれ異なった方向に進む。このようにして分散された平行光線は、望遠鏡の対物レンズ L_O を通過すると、各々の平行光線は収斂光線となり、対物レンズの焦面上に収斂する。

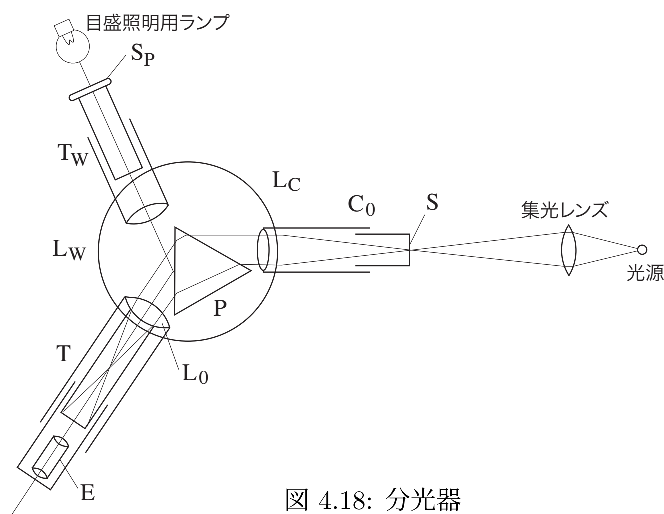
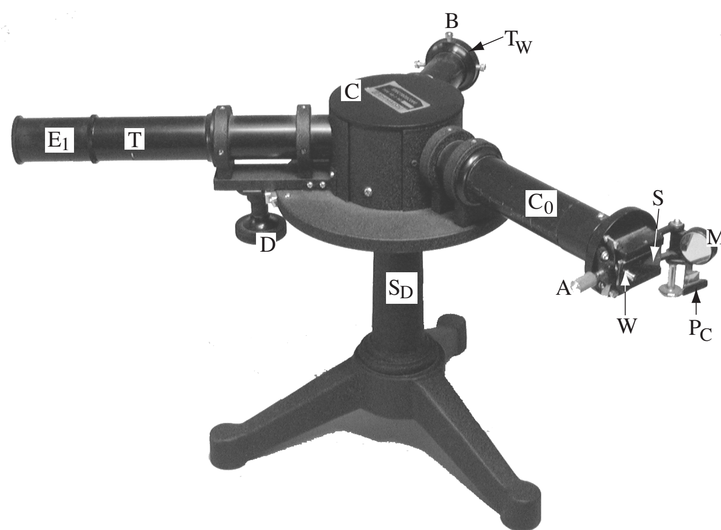


図 4.18: 分光器

このようにして、スリット S の実像が各々の波長に応じて生ずる。このスリットの実像がスペクトルで、これを接眼レンズ E を通して観測する。

本分光器には、別に波長目盛投影管 T_W が設けられており、照明ランプによって目盛板 S_P を照らすと、目盛からの光はプリズムの一面で反射されて、対物レンズに入り、その焦面上に目盛の像を作る。従って、スペクトルと同時に目盛の像を見ることができ、スペクトル線の波長を知ることができる。

分光器の外観を図 4.19 に示す。分光器はすでに調整済みである。通常の操作でこの調整が狂うことはないが、物をぶつけたり、机から落としたりしないように注意すること。



C_0	コリメーター	W	V 字形くさび
T	望遠鏡	A	スリット調整ねじ
T_W	波長目盛投影管	B	目盛板調整ねじ
S_D	支持台	C	プリズム箱ブタ
M	反射鏡	D	望遠鏡回転ハンドル
P_0	比較プリズム	E_1	接眼鏡
S	スリット		

図 4.19: KB2 型分光器の外観

B　光源装置１

Cd ランプ、Hg ランプは光源装置に直接取り付ける。ON-OFF スイッチを ON にし、START の赤いボタンを数秒押しつづける。赤いボタンを離すと点燈する。

Cd ランプは点燈後、安定するまで５分程度待つこと。

ランプは熱くなるので手袋を着用して交換すること。

C　光源装置２

図 4.20 のように、未知のスペクトル管 a, b, c (1) は、光源装置の (2) の部分にあるバネの間に設置して使用する。スイッチ (3) を ON にして、手元スイッチ (4) のボタンを押すと点燈する。無理にスペクトル管を着脱して、管を破損しないように注意すること。ランプは熱くなるので手袋を着用して交換すること。



図 4.20: 光源装置 2

[測定]

1. Cd ランプをスペクトル光源装置にとりつけスリットの直前に置いて望遠鏡をのぞき、接眼鏡を伸縮してスリットの像が明瞭に見えるようにする。

2. 目盛板の前面に望遠鏡光源装置を置き、望遠鏡をのぞくと目盛線が現れる。目盛り線の読みは、特に短波長側において視差が大きい。そこで、目盛りを読む時にはおよそ分光器の中心に向かってまっすぐ眺めるようにし、望遠鏡回転ハンドル（D）によって観測する波長を変えるとよい。

3. スペクトルを見ながら、スリット間隔調節ねじによってスリットの幅を除々にせばめると、最初はスペクトル線が段々と尖鋭になってくる。しかし、さらにせばめてゆくとスペクトルの光度が弱くなるのみならず、スリットをいためることもあるので、観察しやすい位置でとめる。

4. 光源装置１を使って、Cd ランプ、Hg ランプの測定をおこなう。スペクトル線の位置を目盛板を使って読み、大体の線の強さ（強、中、弱程度のもの）及び色を記しておく。

5. Cd および Hg の波長を表（89〜92 ページ）から調べ、縦軸に波長、横軸に目盛板の読みをとり、グラフ（分散曲線）を描く。

6. 光源装置２を使って、未知のスペクトル管 a, b, c の測定をおこなう。

7. 5 で求めた分散曲線を利用し、未知の光源 a, b, c のスペクトルの波長を求める。

[課題]

1. 分散曲線の結果を報告せよ。Cd と Hg の結果はひとつのグラフ描き、データが区別できるようにしておくこと。

2. 未知の光源 a, b, c は水素、ヘリウム、リチウム、ネオン、ナトリウム、アルゴンのどれかである。

   88～92 ページのグラフや表と比較してこれらの光源の元素を推定せよ。推定した根拠を論理的に説明すること。

   「なぜその元素と考えられるのか」「なぜその他の元素ではないのか」「どの程度の精度で結論を得ることができるのか」等を明確にすること。

   （コンピュータには「分光器」という Excel のファイルが置いてある。利用するとよい。）

3. 水素から出る光についての法則 (式 (4.16), 83 ページ) の確認

   (1) 未知の光源の中には水素が含まれている。未知の光源から水素を選び出し、その測定した波長をエネルギー（電子ボルト (eV) 単位）に変換せよ。$1\ \mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J である。

   (2) 水素原子から出る光のエネルギーは

   $$E = R\left(\frac{1}{{n_f}^2} - \frac{1}{{n_i}^2}\right)$$

   と表すことができるはずである。実験で測定された光は $n_f = 2$ で $n_i = 3, 4, 5, 6$ に対応するものである。縦軸に観測した光のエネルギー E、横軸に $1/n_f^2 - 1/n_i^2$ を取ったグラフを描き、その傾きから定数 R（リュードベリ定数）を eV 単位で求めよ。

   (3) 式 (4.16)（83 ページ）によると、リュードベリ定数 R は

   $$R = \frac{me^4}{8h^2{\varepsilon_0}^2}$$

   と表すことができる。電子の質量 $m = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, 電子の電荷 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s, 真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.857 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/N{\cdot}m^2}$ を用いて、R の値を計算し、実験結果から得られた値と比較せよ。

4. リュードベリ定数 R と水素原子のイオン化エネルギーの関係について考察せよ。

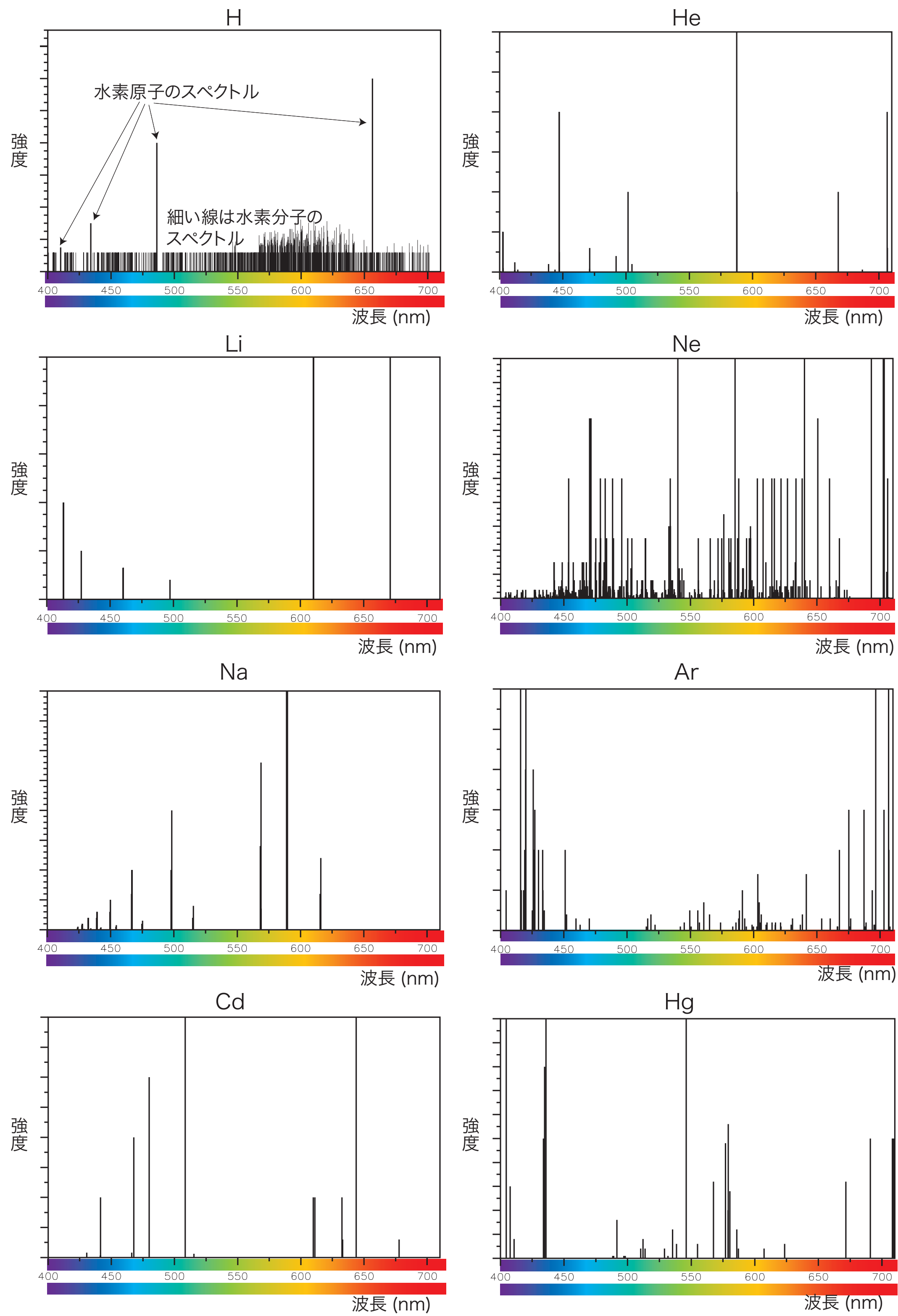
5. この実験で得られた水素の光には $n_f = 1$ や $n_f \geqq 3$ の光は含まれていない。その理由を定量的*に説明せよ。

*Quantitative: The term quantitative refers to a type of information based in quantities or else quantifiable data (objective properties) as opposed to qualitative information which deals with apparent qualities (subjective properties). It may also refer to:
* Quantitative property, a measurable property such as distance, mass, or time or productivity * Quantitative research, scientific investigation of quantitative properties * Quantitative verse, a metrical system in poetry * Statistics, also known as quantitative analysis * Numerical data, also known as quantitative data

[参考書]

1. 朝永 振一郎 著　「量子力学」 3,4 章
2. シュポルスキー 著　「原子物理学」 5,7,8 章
3. Raymond A. Serway 著　松村博之 訳「科学者と技術者のための物理学」（学術図書出版社）
4. ヘルツベルグ著　堀健夫訳「原子スペクトルと原子構造」（丸善、教官所有）

図 4.21: 原子から放出される光（グラフの横軸は方眼紙の目盛と一致するように描いてある）



表：各種元素の原子が出す光の波長と強度　(* 印を付したものは特に強い線)

波長 (nm)	強度
水素	
410.174*	15
434.047*	30
486.133*	80
656.272*	120
ヘリウム	
400.927	1
402.619*	50
402.636	5
412.082	12
412.099	2
414.376	3
438.793	10
443.755	3
447.148*	200
447.168	25
471.315*	30
471.338	4
492.193*	20
501.568*	100
504.774	10
587.562*	500
587.597*	100
667.815*	100
686.748	3
706.519*	200
706.571*	30
リチウム	
413.256	40
427.307	20
427.313	20
460.283*	13
460.289*	13
497.166	8
497.175	8
610.354*	320
610.365*	320
670.776*	3600
670.791*	3600
ネオン	
401.375	10
401.400	20
402.002	20
403.726	50
403.762	150
403.770	50
404.233	100
404.264	500
404.566	20
406.404	500
406.483	150
406.884	300
406.924	300
406.939	50
407.936	20
408.015	500
411.188	10
411.210	150
411.269	200
411.287	100
412.694	20
412.807	300
413.051	200
413.106	700
416.481	500
416.609	300
417.397	20
417.437	700
417.522	600
417.549	400
419.642	150
419.810	700
420.327	20
423.232	10
424.954	20
425.242	20
425.278	20
425.650	20
425.974	10
426.248	20
426.729	10
426.772	50
426.801	700
426.972	700
427.023	500
427.466	500
427.517	10
427.556	700
427.885	50
427.928	150
428.324	100
428.854	50
428.980	20
429.198	20
430.325	300
430.370	10
430.396	50
430.625	700
431.013	20
431.411	10
431.470	300
431.601	150
431.883	50
431.951	10
432.149	20
432.727	100
433.413	700
433.623	500
433.820	20
434.026	20
434.042	20
434.548	20
434.576	10
434.604	150
435.730	20
435.792	50
435.883	20
436.269	300
436.323	20
436.352	700
436.571	10
437.150	20
437.216	300
437.500	20
437.775	20
438.122	300
439.437	150
439.477	150
439.501	10
439.531	10
439.556	500
439.597	10
439.718	10
439.814	50
440.237	20
440.258	10
440.299	10
440.558	20
440.962	200
441.229	200
441.356	150
441.514	50
441.682	500
442.056	10
442.156	500
442.252	3000
442.481	3000
442.540	1500
442.776	300
442.798	150
442.941	10
443.252	200
443.340	100
443.372	700
443.509	50
444.036	150
444.036	150
444.081	20
444.089	10
444.498	300
444.567	10
444.654	10
445.298	150
445.325	50
445.332	20
445.353	10
445.429	50
445.556	150
445.638	10
446.018	1000
446.286	20
446.565	500
446.605	50
446.650	20
446.681	700
446.749	10
447.097	50
447.225	10
447.513	50
447.566	1000
448.082	150
448.319	1500
448.809	3000
449.177	800
449.184	500
449.213	50
449.241	300
449.269	150
449.311	50
449.370	500
449.900	20
449.984	50
449.984	50
450.018	500
451.017	150
451.151	200
451.489	700
451.502	20
451.541	300
451.694	500
451.774	1000
452.576	700
452.618	500
452.669	150
452.773	150
452.797	10
452.948	300
453.240	10
453.630	1500
453.768	3000
453.775*	10000
453.830	3000
453.917	500
454.038	500
454.450	500
454.573	10
454.722	100
454.773	150
455.064	10
455.260	300
455.442	100
455.456	50
455.482	400
455.539	300
455.670	20
456.245	10
456.589	600
456.683	400
456.714	150
456.785	100
457.306	50
457.356	500
457.390	300
457.506	3000
457.586	200
458.204	1500
458.211	150
458.245	1500
458.256	150
458.298	50
458.588	100
458.615	20
459.324	500
459.525	500
460.410	150
460.468	10
460.494	50
461.691	50
461.784	700

波長 (nm)	強度
ネオン	つづき
462.780	20
462.831	1500
462.846	300
463.613	700
463.664	700
463.697	500
463.959	300
464.044	700
464.318	50
464.393	20
464.483	400
464.542	3000
464.589	10
464.990	700
465.210	300
465.370	500
465.639	3000
466.111	1500
466.309	400
466.352	200
466.665	500
466.736	1000
467.088	700
467.822	3000
467.861	500
467.914	1500
468.037	1000
468.120	500
468.193	200
468.215	200
468.291	100
468.324	50
468.376	300
468.767	1000
468.819	20
469.158	150
469.536	200
469.694	50
470.047	50
470.253	1500
470.439*	15000
470.886*	12000
471.007	10000
471.049	300
471.206	15000
471.214	150
471.280	100
471.434	700
471.512	300
471.526	300
471.534	15000
471.761	700
472.153	700
472.215	50
472.271	150
472.381	700
472.416	50
472.515	700
474.958	3000
475.068	300
475.180	300
475.273	5000
475.312	10
475.444	1000
475.873	1500
478.034	3000
478.088	300
478.124	20
478.402	20
478.893	10000
478.960	1000
479.022	5000
479.073	300
480.011	150
480.108	20
480.236	100
480.323	10
480.950	100
481.006	1500
481.064	1000
481.434	500
481.690	10
481.764	3000
481.878	1500
481.994	700
482.192	3000
482.317	1000
482.337	500
482.553	500
482.734	10000
482.759	3000
482.929	50
483.731	5000
484.257	100
484.294	500
484.515	150
484.577	50
484.953	300
485.150	600
485.266	1000
485.960	150
486.308	1000
486.437	300
486.551	1000
486.648	800
486.702	700
486.828	700
488.340	150
488.492	10000
488.510	1000
488.837	50
489.209	5000
489.223	100
489.792	700
489.901	500
492.824	700
493.094	500
493.904	1000
494.499	1000
495.539	1500
495.703	10000
495.712	1500
497.356	1000
497.476	500
497.596	100
497.963	50
499.493	1500
499.621	20
499.748	150
499.850	100
500.040	30
500.356	20
500.516	5000
500.535	500
501.100	250
501.519	50
502.287	250
503.135	2500
503.151	20
503.151	20
503.600	350
503.759	30
503.775	5000
504.160	10
504.285	150
504.582	150
504.661	30
505.294	250
505.915	20
507.405	30
507.420	350
507.660	350
507.877	150
508.038	1500
508.136	150
508.398	250
509.032	80
509.905	250
510.470	350
511.367	750
511.650	1500
511.702	350
512.051	250
512.187	20
512.226	1500
512.236	1500
512.828	20
514.327	50
514.494	5000
514.501	5000
514.514	350
515.008	350
515.196	750
515.443	500
515.667	500
515.890	500
516.348	100
518.232	20
518.861	1500
519.132	350
519.313	1500
519.322	1500
520.390	1500
520.657	30
520.886	700
521.057	500
521.434	350
522.235	500
523.403	500
527.404	400
528.009	500
529.819	1500
530.476	700
531.479	300
531.680	250
532.055	20
532.640	750
533.067	5
533.078	6000
533.331	500
533.571	100
534.109*	10000
534.270	10
534.300	100
534.328	6000
534.920	1500
535.351	50
535.516	1500
535.534	50
535.542	1500
535.802	100
536.001	1500
536.043	350
536.223	250
536.622	250
537.231	750
537.498	500
538.325	250
540.056*	20000
541.012	50
541.265	2500
541.856	1500
542.016	500
543.365	2500
544.712	80
544.851	1500
549.442	500
550.734	250
551.118	30
551.149	150
552.063	30
553.368	750
553.865	500
555.910	350
556.244	1500
556.277	5000
556.305	750
557.604	350
558.591	50
558.935	500
559.115	80
565.257	750
565.603	750
565.666	5000
566.255	750
568.465	250
568.982	1500
571.534	350
571.888	1500
571.922	5000
571.953	750
574.830	5000
574.864	700

波長 (nm)	強度
ネオン	つづき
576.059	700
576.405	30
576.443	7000
577.031	500
580.409	750
580.445	5000
581.141	3000
581.662	500
582.016	5000
582.891	750
585.249*	20000
586.842	750
587.215	750
587.283	5000
588.190*	10000
589.833	200
590.209	30
590.246	500
590.278	50
590.643	500
591.363	2500
591.891	2500
591.903	80
593.445	750
593.932	500
594.483	5000
596.162	700
596.547	5000
596.618	350
597.463	5000
597.553	6000
598.238	80
598.791	1500
599.165	750
600.093	1000
603.000	10000
604.201	150
604.613	500
606.454	500
607.434	10000
609.616	3000
611.802	150
612.845	1000
614.251	1000
614.306*	10000
615.030	1000
615.614	500
616.359	10000
617.282	150
617.488	700
617.528	500
618.215	1500
618.316	50
618.906	700
619.307	500
620.297	150
620.578	1000
621.388	1500
621.728*	10000
622.574	500
624.673	1000
624.959	50
625.273	20
625.879	1000
626.650*	10000
627.301	700
627.603	500
629.374	1000
630.479	1000
631.369	1500
632.816	3000
633.089	1500
633.443	10000
635.185	1000
636.500	1000
638.299*	10000
640.108	1000
640.225*	20000
640.975	1500
642.170	1000
644.471	1500
650.653	15000
653.288	1000
659.895	10000
660.290	1000
664.001	100
664.080	50
665.209	1500
666.689	1000
667.828	5000
671.704	700
672.113	20
673.803	700
675.958	150
692.947	100000
702.405	34000
703.241	85000
705.129	2200
705.91	10000
706.476	80
706.7724	80
ナトリウム	
423.899	6
424.208	10
424.941	1
425.252	2
427.364	15
427.679	20
428.784	2
429.101	3
432.140	30
432.462	40
434.149	3
434.474	5
439.003	40
439.334	60
441.988	5
442.325	8
449.418	60
449.766	100
454.163	10
454.519	15
466.481	120
466.856	200
474.794	20
475.182	30
497.854	200
498.281	400
514.884	40
515.340	80
568.263	280
568.819	70
568.821	560
588.995*	80000
589.592*	40000
615.423	120
616.075	240
アルゴン	
404.442	50
415.859	400
416.418	50
418.188	50
419.071	100
419.103	50
419.832	200
420.067	400
425.119	25
425.936	200
426.629	100
427.217	150
430.010	100
433.356	100
433.534	50
434.517	25
451.073	100
452.232	20
459.610	15
462.844	7
470.232	15
515.139	5
516.229	15
518.775	20
522.127	7
542.135	5
545.165	10
549.587	25
550.611	5
555.870	25
557.254	10
560.673	35
565.070	20
573.952	10
583.426	5
586.031	10
588.262	15
588.858	25
591.209	50
592.881	15
594.267	5
598.730	7
599.900	5
602.515	5
603.213	70
604.322	35
605.272	10
605.937	20
609.880	7
610.564	10
614.544	10
617.017	7
617.310	10
621.250	10
621.594	5
629.687	7
630.766	15
636.958	7
638.472	20
641.631	70
653.811	15
660.485	15
666.068	5
666.405	5
667.728	100
675.283	150
675.616	5
676.661	15
687.129	150
687.958	5
688.817	10
693.766	50
695.148	7
696.025	7
696.543	10000
703.0251	150
706.7218	10000
706.8736	100
707.7024	5
カドミウム	
430.667	8
441.299	3
441.563	100
466.235	8
467.815*	200
479.991*	300
508.582*	1000
515.466	6
609.914	300
611.149	100
632.517	100
633.001	30
643.847*	2000
677.812	30
水銀	
404.657*	1800
407.784*	150
410.805	40
433.922	250
434.751*	400
435.834*	4000
488.300	5
488.991	5
491.607	80
497.037	5
498.064	5
510.270	20
512.064	40
513.794	20
529.074	20
531.678	5
535.405	60
538.463	30
546.075*	1100
554.963	30

567.586	160
576.961*	240
578.966	100
579.067*	280
580.378	140
585.925	60
587.198	20
607.272	20
623.440	30
671.643	160
690.752*	250
708.1901	250
709.186	250
708.1901	250

V　付録

A　有効数字

有効数字とは、最後から 2 桁目の数字までは信頼できるが、最後の桁の数字は不確かさをもつように表わしたものである。

$5.02\ \times10^2$	有効数字 3 桁	2530	有効数字 3 桁
$1.158\ \times10^3$	有効数字 4 桁	0.00034	有効数字 2 桁

測定値の有効数字の桁数は、測定に使う器械の精度によって限定される。よって測定結果を記録する際は、測定精度に合わせた有効数字で表す。また、測定値に基づいて数値計算するときも無意味な桁まで答を出さないように留意する。

たとえば 230g という測定値は、1g 未満を四捨五入したものであれば 2.30×10^2g と表し、10g 未満を四捨五入したものであれば 2.3×10^2g と表す。2.30×10^2g と 2.3×10^2g では、測定の精度が 10 倍異なる。

B　物理定数表

光の速度　$c=\ 2.99792458\times10^8\ \ \mathrm{m/s}$　プランク定数　$h=\ 6.62606876\times10^{-34}\ \ \mathrm{J\ s}$

電気素量　$e=\ 1.602176462\times10^{-19}\ \ \mathrm{C}$　重力加速度（福井）　$g=\ 9.7983819\ \ \mathrm{m/s^2}$

C　接頭語

記号	乗数	接頭語		記号	乗数	接頭語	
T	10^{12}	テラ	tera	d	10^{-1}	デシ	deci
G	10^9	ギガ	giga	c	10^{-2}	センチ	centi
M	10^6	メガ	mega	m	10^{-3}	ミリ	milli
k	10^3	キロ	kilo	μ	10^{-6}	マイクロ	micro
h	10^2	ヘクト	hecto	n	10^{-9}	ナノ	nano
da	10^1	デカ	deca	p	10^{-12}	ピコ	pico

D　指数についての規則

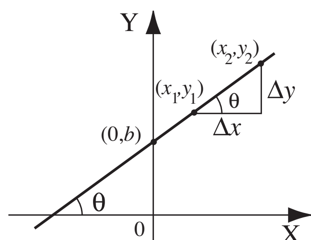
$$x^0=1,\qquad x^1=x,\qquad x^nx^m=x^{n+m},$$
$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m},\qquad x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x},\qquad (x^n)^m=x^{nm}$$

E　式の展開

- $(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\cdots+{}_nC_kx^ky^{n-k}+\cdots+y^n$
- $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$　（等比級数の和）
- $(1+\Delta)^n\cong1+n\Delta$　（$\Delta<<1$ の場合、$\cong$ は近似的に等しいという意味）

F　各種関数

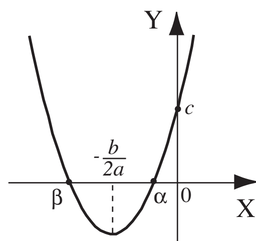
○ 1 次関数



$$y = ax + b$$

傾き　$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$

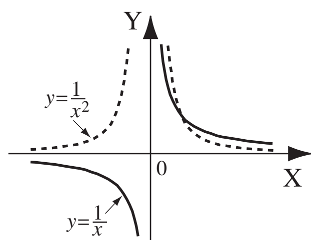
○ 2 次関数



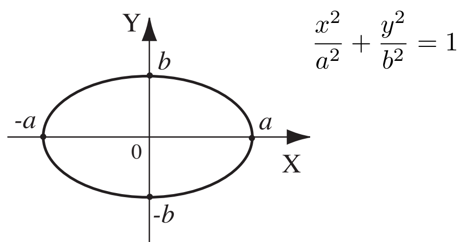
$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= (x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned}$$

2 次方程式の解　$\alpha, \beta = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

○ 双曲線

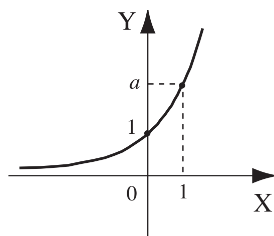


○ 楕円

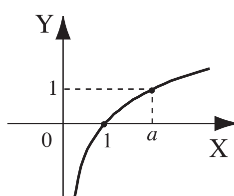


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

○ 指数関数 $(y = a^x)$

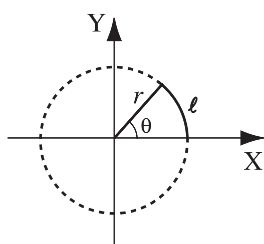


○対数関数 $(y = \log_a x)$



G　三角関数

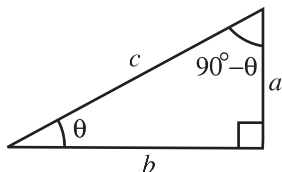
弧度法



$$\theta\ [\mathrm{rad}] = \frac{\ell}{r}$$

度	0°	30°	60°	90°	180°	360°
ラジアン	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π

三角比



ピタゴラスの定理　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\sin\theta=\dfrac{a}{c},\quad \cos\theta=\dfrac{b}{c},\quad \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{a}{b}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

より一般には、　$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

三角関数の公式

- $$\begin{aligned}\sin(x\pm y)&=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x\pm y)}-e^{-i(x\pm y)}\right)\\&=\frac{1}{2i}\{(\cos x+i\sin x)(\cos y\pm i\sin y)-(\cos x-i\sin x)(\cos y\mp i\sin y)\}\\&=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\end{aligned}$$
- $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$
- $\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$
- $\sin(2x)=2\sin x\cos x$
- $\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$
- $\tan(2x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}$
- $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1-\cos x}{2}$
- $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1+\cos x}{2}$
- $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
- $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x$
- $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$

H　対数関数

対数の性質

- $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
- $\log_a x^n=n\log_a x$
- $\log_a a=1$
- $\log_a 1=0$

自然対数の底 e

$$e\overset{\text{定義}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718281828...$$

$$\begin{aligned}e^x&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x\overset{m=nx}{=}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\\&=\lim_{m\to\infty}\left(1+x+\frac{m(m-1)}{2\cdot1}\left(\frac{x}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3\cdot2\cdot1}\left(\frac{x}{m}\right)^3+\cdots\right)\\&=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\end{aligned}$$

I　微分公式

$(x^k)'=kx^{k-1}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\mathrm{e}^{ax})'=a\mathrm{e}^{ax}$

$(\dfrac{1}{x+a})'=-\dfrac{1}{(x+a)^2}$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\log_e x)'=\dfrac{1}{x}$

J 積分公式

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log_e |ax+b|$$
$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a^2-x^2>0)$$
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$
$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$
$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$
$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$
$$\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$
$$\int \cos^2(ax)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

K 曲率半径

図 K.1 のように、関数 $y = f(x)$ に点 (x, y) で接する円を考える。このような円を **接円** という。いま、接円の中心の座標が (a, b) で、半径が r であるとする。このような円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{K.1}$$

と書ける。この式の両辺を微分すると

$$(x-a) + (y-b)y' = 0 \tag{K.2}$$

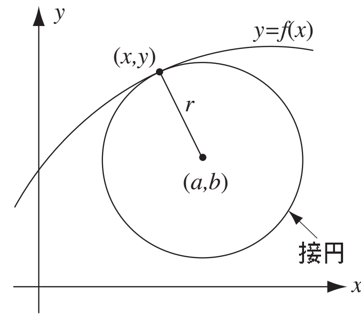


図 K.1: 曲率半径

さらに式 (K.2) の両辺を微分すると

$$1 + (y')^2 + (y-b)y'' = 0 \tag{K.3}$$

となる。式 (K.3) から

$$y - b = -\frac{1+(y')^2}{y''} \tag{K.4}$$

であることが分かり、これを式 (K.2) に代入すると

$$x - a = \frac{y'(1+(y')^2)}{y''} \tag{K.5}$$

となる。式 (K.4) と (K.5) を式 (K.1) に代入して整理すると、接円の半径が

$$r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|} \tag{K.6}$$

であることが分かる。このような接円の半径を **曲率半径** という。

L　テーラー展開

1 変数関数

ある関数 $f(x)$ が

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{L.1}$$

と べき級数 で表わすことができるとする。式 (L.1) の両辺に $x = x_0$ を代入すると

$$a_0 = f(x_0) \tag{L.2}$$

が得られる。また、式 (L.1) の両辺を微分していくと

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots \tag{L.3}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2(x-x_0) + \cdots \tag{L.4}$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (n+1)!\, a_{n+1}(x-x_0) + \cdots \tag{L.5}$$

となる。これらの式に $x = x_0$ を代入すると

$$a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0), \quad \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \tag{L.6}$$

のように級数の係数を決定することができる。したがって、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots \tag{L.7}$$

と表わされる。このように $f(x)$ を $(x-x_0)$ のべき級数で表わすことを、$f(x)$ の x_0 のまわりの **テーラー展開** という。

式 (L.1) において x を $x+\delta x$ とおき、x_0 を x とすると、$x - x_0 = \delta x$ となるので

$$f(x+\delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\delta x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\delta x)^n + \cdots \tag{L.8}$$

と表わすことができる。δx を微小量として $(\delta x)^2$ 以上の項を無視すると

$$f(x+\delta x) \simeq f(x) + f'(x)\delta x \tag{L.9}$$

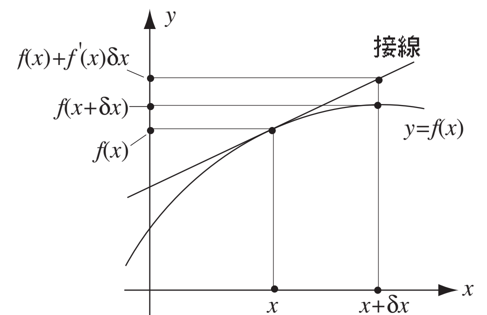


図 L.1: 関数の近似

が得られる。式 (L.9) は、関数 $f(x)$ の点 $x+\delta x$ における値 $f(x+\delta x)$ が点 x における傾き $f'(x)$ に δx を掛けて $f(x)$ に加えたものになっていることを意味している (図 L.1 参照)。さらに微小量の 2 次、3 次と高次まで考慮するにつれて、近似がよくなる (元の関数に近付いていく) 様子を三角関数 $\sin\theta,\ \cos\theta$ を例に示す。式 (L.9) において $x \to 0,\ \delta x \to \theta$ とすると

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \tag{L.10}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \tag{L.11}$$

である。図 L.2,L.3 より、θ のべきの高次まで加えていくにつれて、元の関数 $\sin\theta,\ \cos\theta$ に近付いていく様子がわかる。

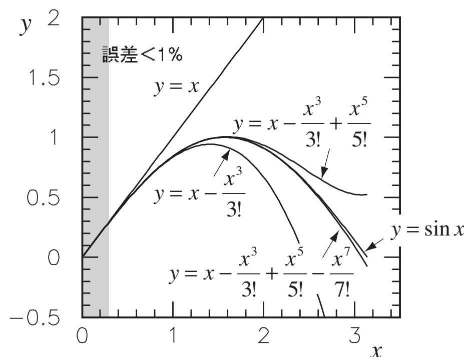


図 L.2: sin の近似

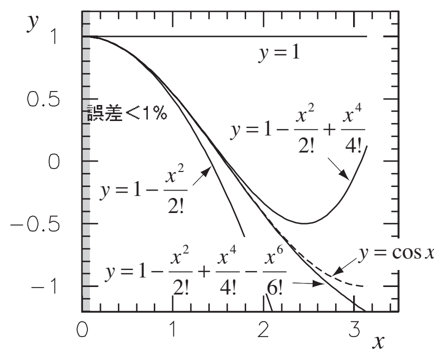


図 L.3: cos の近似

他のいくつかの関数のべき級数を以下に示す。

$$\tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{5}{12}\theta^5 + \cdots \quad \text{(L.12)}$$

$$\mathrm{e}^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots \quad \text{(L.13)}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{(L.14)}$$

多変数関数

次に、2 変数関数 $z = f(x, y)$ のテーラー展開について考える。点 (x, y) と点 $(x + \delta x,\ y + \delta y)$ の間の点 $(x + t\ \delta x,\ y + t\ \delta y)$ について、

$$F(t) \equiv f(x + t\ \delta x,\ y + t\ \delta y) \quad \text{(L.15)}$$

と定義する。ただし、$0 < t \leq 1$ である。式 (L.1) を用いて、t についての 1 変数関数 $F(t)$ をテーラー展開すると

$$F(t) = F(0) + F'(0)\ t + \frac{1}{2!}F''(0)\ t^2 + \cdots \quad \text{(L.16)}$$

となる。ここで

$$F(0) = f(x, y) \quad \text{(L.17)}$$

$$F'(0) = f_x(x, y)\ \delta x + f_y(x, y)\ \delta y \quad \text{(L.18)}$$

$$F''(0) = \cdots \quad \text{(L.19)}$$

より、

$$F(t) = f(x, y) + f_x(x, y)\ t\ \delta x + f_y(x, y)\ t\ \delta y + \cdots \quad \text{(L.20)}$$

と書けることがわかる。ただし、$f_x(x, y)$ は関数 $f(x, y)$ を x で偏微分して点 (x, y) を代入した値、$f_y(x, y)$ は関数 $f(x, y)$ を y で偏微分して点 (x, y) を代入した値である。式 (L.20) において $t = 1$ とすると

$$f(x + \delta x,\ y + \delta y) = f(x, y) + f_x(x, y)\ \delta x + f_y(x, y)\ \delta y + \cdots \quad \text{(L.21)}$$

となり、2 変数関数のテーラー展開が得られる。

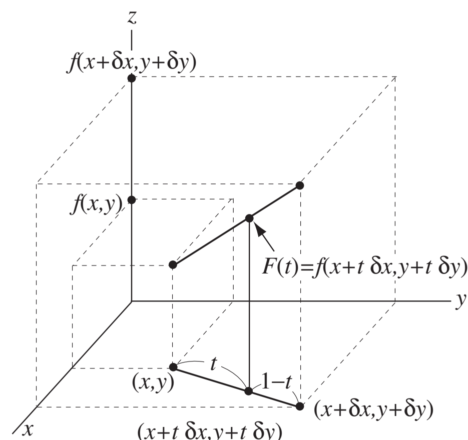


図 L.4: 2 変数関数のテーラー展開

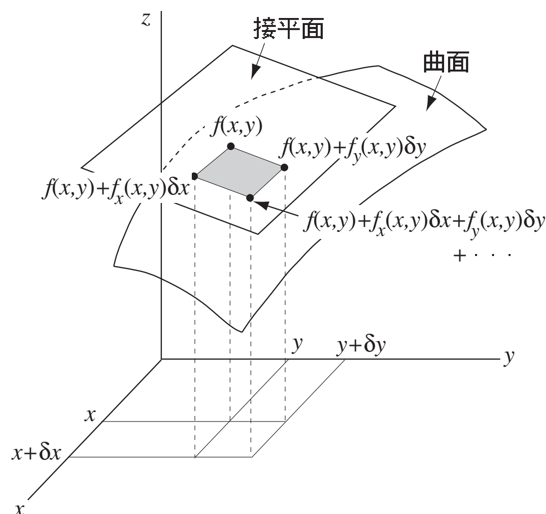


図 L.5: 2 変数関数の近似

式 (L.21) は、1 変数関数の場合の近似式 (L.9) と同様な近似式を与える。図 L.5 に示したように、関数 $z = f(x, y)$ の値は xyz 座標系において曲面をつくる。この曲面上の点 (x, y) において、曲面に接する平面 (接平面) を考えると、点 (x, y) から大きく離れないかぎり、関数 $z = f(x, y)$ の値は接平面上の値として近似することができる。

より多い変数の関数（多変数関数）についても同様に考えることができて、多変数関数のテーラー展開は

$$
\begin{aligned}
&f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, \cdots) \\
&= f(x,y,z,\cdots) + \frac{\partial f(x,y,z,\cdots)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x,y,z,\cdots)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f(x,y,z,\cdots)}{\partial z}\delta z + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y,z,\cdots)}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial^2 f(x,y,z,\cdots)}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2 f(x,y,z,\cdots)}{\partial z^2}\delta z^2 + \cdots\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{\partial^2 f(x,y,z,\cdots)}{\partial x \partial y}\delta x\delta y + \frac{\partial^2 f(x,y,z,\cdots)}{\partial y \partial z}\delta y\delta z + \frac{\partial^2 f(x,y,z,\cdots)}{\partial z \partial x}\delta z\delta x + \cdots\right\} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
\tag{L.22}
$$

となる。

M 確率分布

本実習に出てくる確率分布として、正規分布とポアソン分布について述べる。

正規分布

確率分布関数が、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{M.1}$$

で与えられるものを正規分布（ガウス分布）という。この正規分布の平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad = \int_{\infty}^{\infty} \{(x-\mu)+\mu\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad = \mu \tag{M.2}$$

となる。ここで、{} 内の第 1 項は奇関数の積分値は 0 であること、および

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \tag{M.3}$$

を用いた。分散は

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx \quad = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du \quad = \sigma^2 \tag{M.4}$$

となる。ここで、変数変換 $u = (x-\mu)/\sigma$ を行った。

ポアソン分布

確率分布が

$$P(N) = \frac{m^N}{N!}\mathrm{e}^{-m} \tag{M.5}$$

のようになるものをポアソン分布という。
このポアソン分布の N についての和は

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} P(N) &= \mathrm{e}^{-m} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{m^N}{N!} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{M.6}$$

となっている。ここで、指数関数 e^x のテーラー展開

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

を用いた。また、平均は

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} NP(N) &= \mathrm{e}^{-m} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N \cdot m^N}{N!} \\ &= m \end{aligned} \tag{M.7}$$

となる。分散は

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} (N-m)^2 P(N) &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N)(N^2 - 2mN + m^2) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N)N^2 - 2m \sum_{N=0}^{\infty} P(N)N + m^2 \sum_{N=0}^{\infty} P(N) \\ &= (m^2 + m) - 2m \cdot m + m^2 \\ &= m \end{aligned} \tag{M.8}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} P(N)N^2 &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 \frac{m^N}{N!}\mathrm{e}^{-m} \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} N \frac{m^N}{(N-1)!}\mathrm{e}^{-m} \\ &= \sum_{N'=0}^{\infty} (N'+1) \frac{m^{N'+1}}{N'!}\mathrm{e}^{-m} \\ &= m\left(\sum_{N'=0}^{\infty} N' \frac{m^{N'}}{N'!}\mathrm{e}^{-m} + \sum_{N'=0}^{\infty} \frac{m^{N'}}{N'!}\mathrm{e}^{-m} \right) \\ &= m\left(\sum_{N'=0}^{\infty} N'P(N') + \sum_{N'=0}^{\infty} P(N') \right) \\ &= m\big(m+1\big) \\ &= m^2 + m \end{aligned} \tag{M.9}$$

を用いた。

N　球座標

球体に関する面積や体積をもとめるためには、右図のような球座標 r, θ, ϕ を用いると便利である。半径 R の球内を表すためには、

$$0 \leqq r \leqq R, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi \leqq 2\pi \tag{N.1}$$

の範囲を考えればよい。半径を r として、角度 θ, ϕ を $\Delta\theta, \Delta\phi$ だけわずかに動かすと球面の一部に微小な面積

$$\Delta S = (r \times \Delta\theta)\,(r \sin\theta \times \Delta\phi) \tag{N.2}$$

を作る。球全体の面積をもとめるためには、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \; d\phi \; d\theta &= r^2 \times \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= r^2 \times 2 \times 2\pi = 4\pi r^2 \end{aligned} \tag{N.3}$$

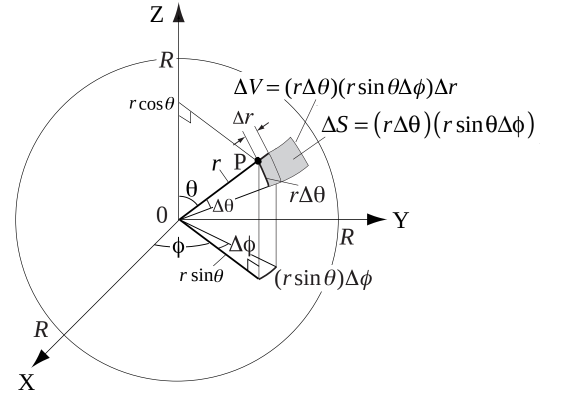


図 N.1: 球座標

と計算すればよい。さらに、半径 r を Δr だけわずかに動かすと、球内に微小な体積

$$\Delta V = (r \times \Delta\theta)\,(r \sin\theta \times \Delta\phi) \times \Delta r \tag{N.4}$$

を作る。球全体の体積をもとめるためには、

$$\begin{aligned} \int_0^{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \; d\phi \; d\theta \; dr &= \int_0^{R} r^2 \; dr \times \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{3}R^3 \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned} \tag{N.5}$$

と計算すればよい。

O　慣性モーメント

慣性モーメントは

$$I = \iiint \rho(r) \; s^2 \; dV \tag{O.1}$$

より、求められる。ここで、$\rho(r)$ は原点からの距離 r の位置での物体の密度、dV は微小体積、s は回転軸から $\rho(r)dV$ までの距離である。

球座標では $dV = r^2 \; dr \sin\phi \; d\phi \; d\theta$ より、式 (O.1) は

$$I = \iiint \rho(r) \; r^4 \; \sin^3\phi \; dr \; d\theta \; d\phi \tag{O.2}$$

と表される。円筒座標では $dV = s \; ds \; d\theta \; dz$ より、式 (O.1) は

$$I = \iiint \rho(r) \; s^3 \; ds \; d\theta \; dz \tag{O.3}$$

と表される。

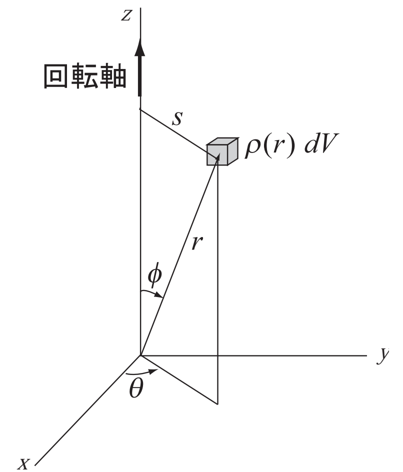


図 O.1: 慣性モーメント

学籍番号

学籍番号	氏名